Розв'язування задач і вправ з алгебри та геометрії

(методичні рекомендації для слухачів підготовчих курсів з математики на базі 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів)

Одеса 2015

Укладач : Н. Г. Тушкова , викладач математики I категорії

ОМУ РП імені О. Соляника

Рецензент : В. В. Грінчук , завідуюча науково–методичною лабораторією математики кафедри методики викладання природничо–математичних дисциплін

Методичні рекомендації розглянуті й ухвалені на засіданні циклової комісії фундаментальних дисциплін загальноосвітньої підготовки

Протокол №______ від _________2015 р.

Голова циклової комісії фундаментальних дисциплін загальноосвітньої

підготовки _______________ /Л. П. Федячкіна/

Методичні рекомендації розглянуті й затверджені на засіданні методичної ради ОМУ РП ім. О. Соляника й рекомендовані для використання під час проведення підготовчих курсів з математики на основі базової загальної середньої освіти.

Протокол №______ від _________2015р.

Голова методичної ради ______________ /Н. А. Мельник/

Вступ

Дані методичні рекомендації призначені для слухачів підготовчих курсів з математики на основі базової загальної середньої освіти .

Методичні рекомендації містять скорочені основні теоретичні відомості з усіх розділів алгебри та геометрії , зразки розв'язування типових задач від найпростіших до складних , достатню кількість завдань для самостійного розв'язування та відповіді до них.

Практичні завдання і вправи сприяють засвоєнню , закріпленню пройденого матеріалу та перевірки знань.

Методичні рекомендації дають змогу здійснити систематичне повторення курсу математики загальноосвітніх навчальних закладів з наступних тем :

1. Дійсні числа. Дії над дійсними числами. Дії з дробами.
2. Означення степеня. Властивості степеня. Формули скороченого множення.
3. Рівняння.
4. Нерівності.
5. Функції. Види функцій .
6. Квадратичні нерівності.
7. Системи рівнянь.
8. Відсотки.
9. Прогресії.
10. Кути.
11. Трикутники.
12. Чотирикутники.
13. Вектори на площині.
14. Координати на площині.

Алгебра

__Тема 1__. Дійсні числа. Дії над дійсними числами. Дії з дробами.

1. ***Натуральні числа*** – це числа, які використовуються при лічбі предметів: 1,2,3…. Множину натуральних чисел позначають буквою $\boldsymbol{N}$.
2. ***Цілі числа*** – це натуральні числа, числа протилежні до них та число нуль. Наприклад: – 5; 0; 7. Множину цілих чисел позначають буквою **Z**.
3. ***Раціональні числа*** – це цілі та дробові числа, які можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m- ціле число (m □ **Z**), n – натуральне число ($n \in \boldsymbol{N}$). Множину раціональних чисел позначаю буквою **Q**.

Наприклад: $\frac{2}{3}$ □ **Q**; – 0,1 □ **Q**; 0 □ **Q**; – 7 □ **Q**; 15 □ **Q.**
$\frac{3}{4}$ = 0,75; $\frac{1}{3}$ = 0,333… - раціональні числа
4. ***Ірраціональні числа*** – це нескінченні десяткові неперіодичні дроби.
Наприклад: $\sqrt{2}$, π, – $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ ≈1,414213…, π ≈ 3,14159…
5. ***Дійсні числа*** – це раціональні та ірраціональні числа. Множину дійсних чисел позначають буквою $\boldsymbol{R}$.
6. ***Модулем або абсолютною величиною*** дійсного числа a називається саме число a, якщо a – додатне або нуль і число – a, якщо a – від'ємне число.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Наприклад: $|5| = 5$, $|-7| = -(-7) = 7$.

Дійсні числа можна **додавати**, **віднімати** , **множити**, **підносити до степеня** й **ділити** (ділити на числа , що відмінні від 0).

__Додавання.__
Щоб **додати два від'ємних числа**, треба додати їхні модулі й поставити перед одержаним числом знак „ – ". **Наприклад:** (–5) + (–7) = – (5+7) = –12.
Щоб **додати два числа з різними знаками**, треба від більшого модуля відняти менший і поставити перед одержаним числом знак того доданка, модуль якого більший.
Наприклад. 1) –5+7=+(7–5)= +2=2; 2) (+5)+(–7)= – (7–5) = –2.

__Віднімання.__
Щоб від одного числа **відняти** друге, досить до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику.

Наприклад: 1) $-21-7 = -21+(-7) = -(21+7) = -28$;

2) $4 - 9 = 4+(-9) = -(9-4) = -5$.

Множення.

Щоб знайти **добуток** двох чисел з ***різними знаками***, треба перемножити їхні модулі й поставити перед одержаним числом знак „ – “ .

Наприклад: 1) $-5 \cdot 6 = -30$;

2) $7 \cdot (-4) = -28$.

Щоб знайти **добуток** двох чисел з ***однаковими знаками***, треба перемножити їхні модулі й поставити перед одержаним числом знак „+“ .

Наприклад: $-8 \cdot (-5) = 40$

Ділення.

Часткою двох *від'ємних* чисел є число додатне . Часткою двох чисел із *різними* знаками є число від'ємне.

Наприклад: $4{,}8 : (-1{,}2) = -4$;

$-3{,}6 : 3 = -1{,}2$;

$5 : (-5) = -1$;

$-7 : (-7) = 1$.

Ділити на 0 не можна.

Розкриття дужок.

Щоб розкрити дужки, перед якими стоїть знак «+», треба опустити дужки і знак «+», що стоїть перед ними , і записати всі доданки зі своїми знаками.

Наприклад: $7 + (13 - 5) = 7 + 13 - 5 = 15$.

Щоб розкрити дужки, перед якими стоїть знак «–», треба опустити дужки і знак «–», що стоїть перед ними, і записати всі доданки з протилежними знаками.

Наприклад: $20 - (7-13) = 20 - 7 + 13 = 26$.

Звичайні дроби.

Звичайним дробом називають число виду $\frac{m}{n}$, де m і n - натуральні числа . Риска дробу означає дію ділення , тобто $\frac{m}{n} = m : n$.

Основна властивість дробу : *Якщо чисельник і знаменник дробу помножити чи поділити на одне й те саме натуральне число, то отримаємо дріб, який дорівнює даному.* **Наприклад:** $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{10}$.

Скорочення дробу називають ділення чисельника і знаменника дробу на їх спільний дільник, відмінний від одиниці. **Наприклад:** $\frac{35}{75} = \frac{35:5}{75:5} = \frac{7}{15}$; $\frac{27}{3} = \frac{9}{1} = 9$.

Дії над звичайними дробами:

1) Щоб **додати** дроби з **однаковими знаменниками** треба скласти їх чисельники, а знаменник залишити той самий. **Наприклад:** $\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{2+1}{7}=\frac{3}{7}$.

2) Щоб **додати** дроби з **різними знаменниками** треба спочатку звести ці дроби до їх найменшого спільного знаменника. **Наприклад:** $\frac{5^{\backslash 2}}{18}+\frac{7^{\backslash 3}}{12}=\frac{10}{36}+\frac{21}{36}=\frac{10+21}{36}=\frac{31}{36}$.

3)Щоб **додати** мішані дроби треба додати послідовно цілі і дробові частини.

Наприклад: 1) $2\frac{3}{5}+3\frac{4}{5}=5+\frac{7}{5}=6\frac{2}{5}$;

2) $2\frac{3}{8}+3\frac{4}{7}=2\frac{21}{56}+3\frac{32}{56}=5\frac{53}{56}$.

4) Щоб **відняти** два дроби з **однаковими знаменниками** треба від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити той самий.

Наприклад: $\frac{4}{7}-\frac{1}{7}=\frac{4-1}{7}=\frac{3}{7}$.

5) Щоб **відняти** два дроби з **різними знаменниками** треба спочатку звести ці дроби до найменшого спільного знаменника, а потім виконати віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Наприклад: $\frac{9}{16}-\frac{5}{12}=\frac{27}{48}-\frac{20}{48}=\frac{27-20}{48}=\frac{7}{48}$.

6) Щоб **відняти змішані** числа треба спочатку звести дробові частини цих чисел до найменшого спільного знаменника. Якщо дробова частина зменшуваного менше дробової частини від'ємника, перетворити його у неправильний дріб, зменшивши на одиницю цілу частину, потім окремо виконати віднімання цілих частин і окремо – дробових частин.

Наприклад: $9\frac{3}{25}-5\frac{3}{10}=9\frac{6}{50}-5\frac{15}{50}=8\frac{56}{50}-5\frac{15}{50}=(8-5)+\left(\frac{56}{50}-\frac{15}{50}\right)=3+\frac{41}{50}=3\frac{41}{50}$.

7) Щоб **помножити** дріб на дріб треба чисельник помножити на чисельник, а знаменник на знаменник. **Наприклад:** $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 7}=\frac{15}{28}$.

8) Щоб **помножити** мішані числа треба спочатку записати їх у вигляді неправильних дробів, а потім помножити чисельник на чисельник, знаменник на знаменник.

Наприклад: $2\frac{1}{3}\cdot 3\frac{1}{2}=\frac{7}{3}\cdot\frac{7}{2}=\frac{49}{6}=8\frac{1}{6}$.

9) Щоб **поділити** дріб на дріб треба ділене помножити на число, обернене дільнику

Наприклад: $\frac{3}{4}:\frac{6}{7}=\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{6}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 6}=\frac{7}{4\cdot 2}=\frac{7}{8}$.

10) Щоб **поділити** мішані числа треба їх записати у вигляді неправильних дробів, а потім скористатися правилом ділення дробів.

Наприклад: $3\frac{5}{7}:2\frac{1}{3}=\frac{26}{7}:\frac{7}{3}=\frac{26\cdot 3}{7\cdot 7}=\frac{78}{49}=1\frac{29}{49}$.

Десяткові дроби.

Десятковий дріб складається з двох частин: зліва від коми – цифри цілої частини десяткового дробу, а справа – цифри її дробової частини 5,75.

Звичайний дріб, знаменник якої дорівнює 10;100;1000 називають *десятковим дробом.*

Наприклад: $\frac{3}{10} = 0,3$; $\frac{61}{100} = 0,61$; $\frac{7}{1000} = 0,007$.

Дії над десятковими дробами:

1) **Додавання** і **віднімання** десяткових дробів виконують порозрядно. Для цього дроби записують так, щоб відповідні розрядні одиниці й коми були одні під одними.

Наприклад: $\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 0,71 \\ 14,30 \end{array} \\ \hline 15,01 \end{array}$; $\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 1,70 \\ 0,54 \end{array} \\ \hline 1,16 \end{array}$.

2) Щоб **помножити** один десятковий дріб на інший потрібно виконати множення, не зважаючи на коми, а потім у добутку відокремити комою справа стільки десяткових знаків, скільки їх є в обох множниках разом. **Наприклад:** $\begin{array}{r} *\begin{array}{r} 1,8 \\ 0,03 \end{array} \\ \hline 0,054 \end{array}$.

3) Щоб **поділити** десятковий дріб на десятковий дріб, потрібно в діленому і дільнику перенести коми праворуч на стільки цифр, скільки десяткових знаків має дільник, а потім виконати ділення на натуральне число.

Наприклад: 0,378 : 0,14 = 37,8 : 14 = 2,7.

Завдання для самостійного розв'язування до теми 1.

№ 1. Знайти значення виразу.

1) $\frac{1}{3} + \frac{1}{7}$;

2) $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$;

3) $\frac{3}{7} - \frac{1}{4}$;

4) $1\frac{1}{6} + 3\frac{3}{4}$;

5) $5\frac{5}{6} + 1\frac{1}{8}$;

6) $5 - 3\frac{2}{9}$;

7) $9 - 4\frac{2}{5}$;

8) $5\frac{3}{5} \cdot 10$;

9) $2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{5}$;

10) $\frac{4}{7} : \frac{1}{14}$;

11) $4\frac{1}{6} : 5$;

12) $3\frac{1}{14} - 2\frac{5}{7}$;

13) $2\frac{4}{9} + 5\frac{1}{6}$;

14) $5\frac{5}{7} \cdot 2\frac{4}{5}$;

15) $(\frac{5}{12} + \frac{3}{8}) \cdot \frac{12}{19}$;

16) $(\frac{11}{18} - \frac{5}{12}) \cdot \frac{6}{7}$;

17) $9\frac{1}{4} \cdot 8 - 3\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2}$;

18) $1\frac{1}{22} \cdot 3\frac{2}{3} - (2\frac{5}{6} + 3\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{23})$;

19) $\left(3\frac{1}{4} + 2\frac{1}{6}\right) : 2\frac{3}{5} - \frac{2}{3} : \frac{4}{9}$;

20) $(38,4 - 5,6 \cdot 1,5) : 2,4$.

Відповіді до теми 1:

1) $\frac{10}{21}$; 2) $\frac{11}{12}$; 3) $\frac{5}{28}$; 4) $4\frac{11}{12}$; 5) $6\frac{23}{24}$; 6) $1\frac{7}{9}$; 7) $4\frac{3}{5}$;

8) 56; 9) 3,5; 10) 8; 11) $\frac{5}{6}$; 12) $\frac{5}{14}$; 13) $7\frac{11}{18}$; 14) 16;

15) $\frac{1}{2}$; 16) $\frac{1}{6}$; 17) 57,5; 18) $-\frac{1}{6}$; 19) $\frac{7}{12}$; 20) 12,5.

Тема 2. Означення степеня. Властивості степеня. Формули скороченого множення

1. ***Степенем числа*** a з натуральних показником n називають добуток n множників, кожен з яких дорівнює a .

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ –множників}}}$$

$\boxed{a^0=1}$; $\boxed{a^1 = a}$; $\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$; $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$; $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}}$; $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$

Наприклад:

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$;

$0{,}75^{-2} = \left(\frac{75}{100}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$.

2.**Основні властивості степенів**:

1) $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$; 2) $\boxed{a^m : a^n = a^{m-n}}$; 3) $\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$; 4) $\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$;
5) $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$.

Обчисліть:

1) $\frac{a^3 \cdot a^5}{a^{10}} = a^{3+5-10} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; 2) $(a^3)^5 = a^{15}$; 3) $(x^3 y^2 z^4)^2 = x^6 y^4 z^8$; 4) $\left(\frac{x^3}{y^5}\right)^2 = \frac{x^6}{y^{10}}$.

3. ***Одночленами*** називають числа, змінні, їхні степені з натуральними показниками та добутки. **Наприклад:** a; b^5; 3 ; $2ab^7$.

4. ***Многочленом*** називають суму кількох одночленів.

Наприклад: $3a^2 + b$; $x - 2y + 5$.

5. **Формули скороченого множення :**

1) $\boxed{(a-b)(a+b) = a^2 - b^2}$ – ***різниця квадратів***
2) $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ – ***квадрат суми***
3) $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ – ***квадрат різниці***
4) $\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$ –***сума кубів***
5) $\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$ –***різниця кубів***

Наприклад:

1. Подайте у вигляді многочлена

1) $(2x+1)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$;
2) $(4a-5b)^2 = (4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 5b + (5b)^2 = 16a^2 - 40ab + 25b^2$;
3) $(x-5)(x+5) = x^2 - 25$;
4) $(2x-1)(2x+1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$;

5) $(3a+4b)(3a-4b)=(3a)^2-(4b)^2=9a^2-16b^2$;
6) $(x^2-y^3)(x^2+y^3)=(x^2)^2-(y^3)^2=x^4-y^6$.

2. Розкладіть многочлен на множники з використанням формул скороченого множення:

1) $x^2-16=x^2-4^2=(x-4)(x+4)$;
2) $a^2-25b^2=a^2-(5b)^2=(a-5b)(a+5b)$;
3) $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$;
4) $a^3+27=a^3+3^3=(a+3)(a^2-3a+9)$.

3. Винесення спільного множника за дужки
1) $3x^5-6x^3=3x^3(x^2-2)$;
2) $5x^4-10x^2=5x^2\cdot(x^2-2)$.

Завдання для самостійного розв'язування до теми 2.

№1. Обчисліть.

1) $12\cdot3^{-2}$; 3) $2^6\cdot2^{-8}+2$; 5) $1{,}25^{-3}+2{,}5^{-2}$;

2) $80\cdot2^{-3}-2^2$; 4) $(-1\frac{2}{3})^{-2}$; 6) $0{,}75^{-2}\cdot1{,}5^{-3}-(-3)^0$.

№2. Знайдіть значення виразу.

1) $3^0+3^{-4}\cdot(3^{-2})^{-3}-(0{,}5)^{-2}$; 3) $(-2)^{-3}\cdot(\frac{1}{2})^{-4}$; 5) $\frac{16\cdot2^3}{2^2\cdot(-2)^4}$;

2) $\frac{27^{-3}\cdot3^{-10}}{81^{-5}}$; 4) $(1\frac{3}{7})^{-1}-(3\frac{1}{3})^{-2}$; 6) $3^{-3}\cdot9^8:27^5$.

№3. Скоротіть дріб.

1) $\frac{x^8y^3}{x^2y^9}$; 2) $\frac{10x^{12}y^2}{15y^8x^4}$; 3) $\frac{6a^6b^5}{14a^2b^{15}}$.

№4. Подайте у вигляді дробу вираз.

1) $(\frac{a^6}{2b^3})^3$; 2) $(-\frac{3a^2b^3}{4c^3})^3$; 3) $(-\frac{3a^5}{4b^3})^2$.

№5. Виконайте множення або ділення.

1) $-3a^2b^3\cdot0{,}5a^3b^4$; 4) $\frac{5m^6}{6}\cdot\frac{3}{m^2}$; 7) $\frac{15x^9}{4y}:9x^3$;

2) $0{,}25a^5b^4\cdot0{,}4a^{-9}\cdot b^{-3}$; 5) $\frac{9y^6}{x^{12}}\cdot\frac{2x^4}{3y^2}$; 8) $24m^3:\frac{16m}{n^2}$;

3) $12x^{12}\cdot\frac{y^3}{8x^4}$; 6) $\frac{a^{15}}{2}:\frac{a^5}{8}$; 9) $\frac{3a^9}{b^6}:9a^3b^2$.

№6. Подайте вираз в вигляді многочлена.

1) $(x+2y)^2$; 3) $(4+x)(x-4)$; 5) $(3x-2)(9x^2+6x+4)$;

2) $(3a-b)^2$; 4) $(a^2-2b)(b-3a^2)$; 6) $(3+x)(x-3)-(6+x^2)$.

№7. Спростіть вираз.

1) $(0{,}2ab^3)^2 \cdot 5a^2b$; 4) $(3a-b)(3a+b)+b^2$;

2) $(\frac{a^3}{b^2})^{-2} \cdot a^4b^{-7}$; 5) $(3x-2)^2+12x$;

3) $xy(2x-3y)-3y(x^2-xy)$; 6) $(a+2)(a^2-2a+4)-8$;

7) $-7ab+(5a+b)(2b-3a)$.

№8. Розкладіть на множники многочлен.

1) $8xy-4y^2$; 2) a^3-64; 3) $2-8x$; 4) $5c^2-5d^2$.

№9. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена.

1) x^2-6x+9; 2) $a^2-8ab+16b^2$; 3) $9a^2-6ab+b^2$.

№10. Виконайте додавання.

1) $\frac{a}{2}+\frac{3}{b}$; 2) $\frac{2x}{y}+\frac{y}{4}$; 3) $\frac{3a}{b}+\frac{5b}{a}$; 4) $\frac{15}{x^2-5x}+\frac{3}{x}$; 5) $\frac{2a+b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}$; 6) $\frac{x-1}{3x+12}+\frac{2-x}{2x+8}$.

№11. Виконайте віднімання.

1) $\frac{7y}{x}-\frac{5x}{y}$; 2) $\frac{3}{4x}-\frac{5}{6y}$; 3) $\frac{2x^2}{x-4}-2x$; 4) $\frac{2x+1}{x-3}-\frac{2x+3}{3-x}$; 5) $\frac{3}{a+1}-\frac{3a-1}{a^2+a}$.

№12. Виконайте множення.

1) $\frac{2x-8}{x+2}\cdot\frac{3x+6}{x^2-16}$; 2) $\frac{4x^2-x}{x^2-9}\cdot\frac{x+3}{4x-1}$; 3) $\frac{a^2-b^2}{a^2+ab}\cdot\frac{3a}{b-a}$; 4) $\frac{2c-10}{4c^2+4c+1}\cdot\frac{2c+1}{c-5}$.

№13. Виконайте ділення.

1) $\frac{x^2-1}{5x} : \frac{x+1}{x^2}$; 2) $\frac{x^2-xy}{x^2} : \frac{x^2-2xy+y^2}{xy}$; 3) $\frac{a+2}{a-2} : \frac{a^2+4a+4}{3a-6}$.

№14. Скоротіть дріб.

1) $\frac{5x(x+3)}{x^2+3x}$; 2) $\frac{a^2-1}{5a+5}$; 3) $\frac{a^2-6a+9}{a^2-9}$.

№15. Знайдіть значення виразу $\frac{10x-2}{5x} : (25x^2-10x+1)$ при $x=0{,}4$.

№16. Виконайте дії $\frac{3}{x-2}-\frac{x+2}{x^2-2x+1}\cdot\frac{3x-3}{x^2-4}$.

№17. Знайдіть значення виразу $\frac{6x^2-2xy}{3y^2-9xy}$ при $x=2{,}5$; $y=\frac{1}{27}$.

№18. Знайдіть значення виразу $\frac{a^2-9}{6a}\cdot\left(\frac{a-3}{a+3}-\frac{a+3}{a-3}\right)$, якщо $a=117$.

№19. **Подайте вираз** $(\frac{3a^{-3}}{4b^{-2}})^{-2} \cdot 9a^{-6}b^2$ **у вигляді виразу, який не містить степеня з від'ємним показником.**

№20. Подайте у вигляді дробу вираз $4 - x + \frac{x^2-12}{x+3}$.

№21. Спростіть вираз $(\frac{2x+1}{x-3} + \frac{2x-1}{x+3}) \cdot \frac{x^2-9}{10x^2+15}$.

№22. Скоротіть дріб $\frac{ab+2b-3a-6}{7a+14}$.

№23. Спростіть вираз $\frac{1}{m-4} - \frac{m+4}{m^2-6m+9} : \frac{m^2-16}{m-3}$.

№24. Спростіть вираз $\frac{a^2-4a+4}{a^2+6a+9} \cdot \frac{2a^2-18}{12-6a}$.

№25. Спростіть вираз $(\frac{a+5b}{a^2-5ab} - \frac{a-5b}{a^2+5ab}) \cdot \frac{25b^2-a^2}{5b^2}$.

№26. Обчисліть значення виразу $\frac{a^2+2a+4}{3a-4} : \frac{a^3-8}{9a^2-16}$, якщо $a = 10$.

№27. Спростіть вираз $\left(\frac{x-2y}{x^2+2xy} - \frac{x+2y}{x^2-2xy}\right) : \frac{4y^2}{4y^2-x^2}$.

№28. Спростіть вираз $\frac{a^2}{ab-b^2} + \frac{b}{b-a}$.

№29. Знайдіть значення виразу $\frac{4a}{a^2-4} : (\frac{a+2}{a-2} - \frac{a-2}{a+2})$, якщо $a = -2013$.

№30. Спростіть вираз $(4a^4b^{-3})^{-1} \cdot (\frac{1}{2}a^{-2}b^5)^{-2}$.

№31. Обчисліть значення виразу $\frac{9b^2+a^2}{a-3b} + \frac{6ab}{3b-a}$, якщо $a = 2013$, $b = 2\frac{1}{3}$.

№32. Спростіть вираз $(\frac{a}{b^2-ab} + \frac{b}{a^2-ab}) \cdot \frac{ab}{b+a}$.

№33. Спростіть вираз $\frac{x-3}{xy-x^2} - \frac{3-y}{xy-y^2}$.

№34. Спростіть вираз $(\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1}) : \frac{4x^2+4}{x^2-2x+1}$.

№35. Скоротіть дріб $\frac{12-6a+3a^2}{a^3+8}$.

№36. Спросіть вираз $(\frac{x}{xy-y^2} - \frac{y}{x^2-xy}) : \frac{x+y}{4xy}$.

№37. Спростіть вираз $(x^{-2} - y^{-2}) : (x^{-1} + y^{-1})$.

Відповіді до теми 2:

№1. 1)$\frac{4}{3}$; 2) 6; 3)$2\frac{1}{4}$; 4)$\frac{9}{25}$; 5)$\frac{84}{125}$; 6)$\frac{13}{27}$.

№2. 1)6; 2)3; 3)−2; 4)$\frac{61}{100}$; 5) 2; 6) $\frac{1}{9}$.

№3. 1)$\frac{x^6}{y^6}$; 2)$\frac{2x^8}{3y^6}$; 3)$\frac{3a^4}{7b^{10}}$. **№4.** 1)$\frac{a^{18}}{86^9}$; 2)$-\frac{27a^6b^9}{64c^9}$; 3)$\frac{9a^{10}}{16b^6}$.

№5. 1) $-1{,}5a^5b^7$; 2)$0{,}1a^{-4}b$; 3)$\frac{3}{2}x^8y^3$; 4)$\frac{5}{2}m^4$; 5)$\frac{6y^4}{x^8}$;

6)$4a^{10}$; 7)$\frac{5x^6}{12y}$; 8)$\frac{3}{2}m^2n^2$; 9)$\frac{a^6}{3b^8}$.

№6. 1)$x^2+4xy+4y^2$; 2)$9a^2-6ab+b^2$; 3) x^2-16;

4)$-3a^4-2b^2+7a^2b$; 5)$27x^3-8$; 6)−15.

№7. 1)$0{,}2a^4b^7$; 2)$a^{-2}b^{-3}$; 3)$-x^2y$; 4)$9a^2$;

5)$9x^2+4$. 6)a^3; 7)$-15a^2+2b^2$

№8. 1) $4y(2x-y)$; 2) $(a-4)(a^2+4a+16)$; 3)$2x(x-2)(x+2)$; 4)$5(c-d)(c+d)$.

№9. 1) $(x-3)^2$; 2)$(a-4b)^2$; 3)$(3a-b)^2$.

№10. 1)$\frac{ab+6}{2b}$; 2)$\frac{8x+y^2}{4y}$; 3)$\frac{3a^2+5b^2}{ab}$; 4)$\frac{3}{(x-5)}$; 5) $\frac{3a}{a^2-b^2}$; 6)$\frac{4-x}{6(x+4)}$.

№11. 1)$\frac{7y^2-5x^2}{xy}$; 2)$\frac{10y-9x}{12xy}$; 3)$\frac{8x}{x-4}$; 4)$\frac{4x+4}{x-3}$; 5)$\frac{1}{a(a+1)}$.

№12. 1)$\frac{6}{x+4}$; 2)$\frac{x}{x-3}$; 3)-3; 4)$\frac{2}{2c+1}$.

№13. 1)$\frac{x(x-1)}{5}$; 2)$\frac{y}{x-y}$; 3)$\frac{3}{a+2}$. **№14.** 1)5; 2)$\frac{a-1}{5}$; 3)$\frac{a-3}{a+3}$.

№15. 1. **№16.** $\frac{3}{x-1}$. **№17.** – 45. **№18.** – 2. **№19.** $\frac{16}{b^2}$. **№20.** $\frac{x}{x+3}$.

№ 21. 0,4. **№22.**-$\frac{b-3}{7}$ **№23.** $\frac{1}{m-3}$. **№24.** $-\frac{(a-2)(a-3)}{3(a+3)}$. **№25.** $-\frac{4}{b}$.

№26. 4,25. **№27.** $\frac{2}{y}$. **№28** . $\frac{a+b}{b}$. **№ 29** . 0,5.

№30. b^{-7}. **№31.** 2006. **№ 32.** −1 **№33.** $-\frac{3}{xy}$. **№34.** $\frac{x-1}{2(x+1)}$. **№35.** $\frac{3}{a+2}$. **№36.** 4.

№37. $\frac{y-x}{xy}$.

Тема 3. **Рівняння.**

1. Лінійні рівняння.

2. Квадратні рівняння.

3. Теорема Вієта .

4. Квадратний тричлен.

5. Рівняння, що зводяться до квадратних: 1) біквадратні;

2) дробові раціональні рівняння.

1. ***Лінійним рівнянням* називають *рівняння виду*** $\boxed{a\,x = b}$, ***де*** x ***— змінна,*** a ***та*** b ***— відомі числа.***

1)Якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний корінь $x = \frac{b}{a}$.

2)Якщо a =0, і $b \neq 0$, то рівняння $0 \cdot x = b$ коренів не має .

3)Якщо a =0 і b =0, то рівняння $0 \cdot x = 0$ має безліч коренів .

Наприклад:

Розв'язати рівняння:

1)$7x = 21$;

$x = 3$.

Відповідь:3.

2) $-\frac{1}{2} \cdot x = 4$;

$x = 4 : \left(-\frac{1}{2}\right)$;

$x = -8$.

Відповідь: − 8.

3) $\frac{x}{6} - \frac{x}{10} = \frac{2}{15}$.

Дане рівняння можна звести до лінійного. Обидві частини помножимо на 30, так як НСК(6,10,15) = 30.

$30 \cdot \left(\frac{x}{6} - \frac{x}{10}\right) = \frac{2}{15} \cdot 30$;

$\frac{30x}{6} - \frac{30x}{10} = 4$;

$5x - 3x = 4$;

$2x = 4$; $x = 2$.

Відповідь: 2.

4)$11 - 4x = 27$;

$-4x = 27 - 11$;

$-4x = 16$;

$x = -4$. Відповідь: − 4.

<u>2.Квадратним рівнянням</u> **називають рівняння виду** $\boldsymbol{a\,x^2 + b\,x + c = 0}$,
де $\boldsymbol{x}$ **– змінна,** $\boldsymbol{a, b}$**, c– відомі числа, причому** $\boldsymbol{a \neq 0}$.

$D = b^2 - 4\,a\,c$ – дискримінант.

1) Якщо $D < 0$, то рівняння коренів не має.

2) Якщо $D = 0$, то рівняння має один корінь $\boxed{x = -\frac{b}{2a}}$.

3) Якщо $D > 0$, то рівняння має два корені $\boxed{x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a};}$ $\boxed{x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.}$

Якщо в квадратному рівнянні b=0 або c=0, то квадратне рівняння називають неповним. Такі рівняння розв'язують методом розкладання його лівої частини на множники.

Наприклад.

Розв'язати рівняння:

1) $\boldsymbol{2\,x^2 - 5\,x = 3}$**.**

Розв'язання

Запишемо рівняння у стандартному вигляді $2\,x^2 - 5\,x - 3 = 0$.

$a = 2;\ b = -5;\ c = -3$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49;\ \sqrt{D} = 7;$

$x_1 = \frac{5+7}{2\cdot 2} = \frac{12}{4} = 3;$

$x_2 = \frac{5-7}{2\cdot 2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$

Відповідь: $x_1 = 3;\ x_2 = -\frac{1}{2}.$

2) $\boldsymbol{3\,x^2 - 16\,x = 0}$**.**

Це неповне квадратне рівняння ($c = 0$). Розкладемо ліву частину на множники $x\,(3\,x - 16) = 0$. Добуток дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю.

$x = 0$ *або* $3\,x - 16 = 0;$

$3\,x = 16;$

$x = \frac{16}{3};$

$x = 5\frac{1}{3}.$

Відповідь: $x_1 = 0,\ x_2 = 5\frac{1}{3}.$

3) $\boldsymbol{x^2 - 16 = 0}$**.**

Це неповне квадратне рівняння ($b = 0$)

$(x - 4)\,(x + 4) = 0$

$x - 4 = 0$ або $x + 4 = 0$

$x = 4 \qquad x = -4$

Відповідь: $x_1 = 4;\ x_2 = -4.$

Квадратне рівняння у якому перший коефіцієнт дорівнює одиниці (<u>а = 1</u>). називають зведеним. Другий коефіцієнт та вільний член зведеного квадратного рівняння позначають відповідно р та q, і рівняння має вигляд $x^2+px+q=0$.

<u>3.Теорема Вієта.</u>

Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів-вільному члену. Тобто якщо x_1 та x_2 - корені рівняння $x^2+px+q=0$, то $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$

<u>4. Розкладання квадратного тричлена на множники.</u>

Квадратним тричленом називається вираз виду ax^2+bx+c, де x – змінна a, b, c – відомі числа, $a \neq 0$.

Формула розкладання квадратного тричлена на множники

$\boxed{ax^2+bx+c = a\cdot(x-x_1)(x-x_2)}$, де x_1, x_2- корені рівняння $ax^2+bx+c=0$.

Наприклад. Розкладіть квадратний тричлен $-x^2+3x+4$ на множники

$a=-1$; $b=3$; $c=4$

Знайдемо корені квадратного рівняння

$D=3^2-4\cdot(-1)\cdot 4=9+16=25$; $\sqrt{D}=5$

$x_1=\frac{-3+5}{2\cdot(-1)}=\frac{2}{-2}=-1$;

$x_2=\frac{-3-5}{2\cdot(-1)}=\frac{-8}{-2}=4$;

$-x^2+3x+4=-1\cdot(x+1)(x-4)$.

<u>5. Рівняння, що зводяться до квадратних.</u>

1) Біквадратні рівняння.

<u>Біквадратним рівнянням</u> **називають рівняння виду $ax^4+bx^2+c=0$, де a, b, c – числа, x – змінна.**

<u>Заміною $x^2=t$ біквадратне рівняння зводять до квадратного.</u>

Наприклад.

Розв'язати рівняння

$x^4-10x^2+9=0$

Заміна $x^2=t$, $(t \geq 0)$, тоді $t^2-10t+9=0$;

$t_1=9$,

$t_2=1$.

Повертаючись до заміни, маємо

1) $x^2=9$; 2) $x^2=1$;

$x_1=3$; $x_3=1$;

$x_2=-3$. $x_4=-1$.

Відповідь: -3; -1; 1; 3.

2) Дробові раціональні рівняння.

Дробовим раціональним рівнянням **називають рівняння , в якому хоча б одна частина є дробовим виразом.**

Наприклад. $\frac{x^2-16}{x-4} = 0$ – дробове раціональне рівняння.

При розв'язанні дробового раціонального рівняння виразу $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ потрібно розв'язати алгебраїчне рівняння $\mathrm{P}(x) = 0$ і вилучити ті його корені, за яких $\mathrm{Q}(x) = 0$ (якщо такі є).

$\frac{x^2-16}{x-4} = 0;$

$\begin{cases} x^2 - 16 = 0, \\ x - 4 \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 4, x_2 = -4, \\ x \neq 4. \end{cases}$

Відповідь: -4.

Завдання для самостійного розв'язування до теми 3

№1. Знайдіть значення виразу

1) $3 \cdot \sqrt{1\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{1\frac{3}{13}} - \sqrt{(-4)^6};$

2) $1{,}5\sqrt{12} + \frac{1}{3}\sqrt{27} - 0{,}6\sqrt{75};$

3) $(5\sqrt{2} - 1)(\sqrt{8} + 1)$;

4) $(\sqrt{3} - 2)^2 + \sqrt{48};$

5) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{15};$

6) $(\sqrt{5} - 2\sqrt{3})^2 + \sqrt{240};$

7) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{5})^2 + (\sqrt{2} + 3\sqrt{5})^2$;

8) $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$;

9) $\sqrt{(-7)^4} - \frac{2\sqrt{160}}{\sqrt{2{,}5}}.$

№2. Винесіть множник з під знака кореня

1) $\sqrt{63};$ 2) $\sqrt{25a^7};$ 3) $3a^2\sqrt{\frac{4}{9}a^2b^4}$, якщо $a < 0$.

№3. 1) Внесіть множник під знак кореня $-3\,a\sqrt{3}$, якщо $a > 0$.

2) Внесіть множник під знак кореня у виразі $\frac{1}{3}b\sqrt{\frac{27}{b^2}}$, якщо $b < 0$.

№4. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу

1) $\frac{8}{\sqrt{2}};$ 2) $\frac{8}{\sqrt{3}-1};$ 3) $\frac{4}{\sqrt{13}-\sqrt{5}};$ 4) $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}.$

№5. Розкладіть на множники квадратний тричлен $-\frac{1}{3}x^2 - x + 6.$

№6. Скоротіть дріб.

1) $\frac{x^2-9}{2x^2-4x-6}$; 2) $\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$; 3) $\frac{a^2-5}{a-\sqrt{5}}$; 4) $\frac{6-\sqrt{12}}{\sqrt{12}-2}$; 5) $\frac{a+5\sqrt{a}}{a-25}$; 6) $\frac{x-6\sqrt{x}\sqrt{y}+9y}{x-9y}$.

№7. Один з коренів рівняння $x^2+4x+q=0$ дорівнює -6. Знайдіть q і другий корінь рівняння.

№8. Складіть квадратне рівняння,корені якого дорівнюють $2-\sqrt{6}$ і $2+\sqrt{6}$.

№9. Відомо що x_1 і x_2 – корені рівняння $x^2-2x-7=0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $5x_1x_2-x_1-x_2$.

№10. Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, коренями якого є числа $-\frac{1}{2}$ і 5.

№11. Корені x_1 і x_2 рівняння x^2-3x+q задовольняють умову $2x_1-x_2=12$. Знайдіть q.

№12. Один з коренів квадратного тричлена x^2+3x+q дорівнює 5. Знайдіть q і другий корінь тричлена .

№13 Один з коренів рівняння $x^2+px-6=0$ дорівнює 1,5 . Знайдіть p і другий корінь рівняння.

№14. Обчисліть значення виразу $\frac{x-3}{x^2-5x+6}$, якщо $x=2{,}001$.

№15. Спростіть вираз $\frac{2x^3}{a^2}\sqrt{\frac{a^6}{16x^8}}$, якщо $a<0$.

№16. Розв'яжіть рівняння.

1) $x^2+9x=0$; **2)** $3\sqrt{\frac{x}{5}}-6=0$; **3)** $5\sqrt{8x-20}-10=0$; **4)** $\frac{12}{\sqrt{3x+1}}=6$;

5) $\frac{2x^2-9x+10}{2x^2-5x}=0$ **6)** $\frac{x^4-x^2-12}{x+2}=0$; **7)** $\frac{x-7}{x-2}+\frac{x+4}{x+2}=1$; **8)** $\frac{2x^2+5x+2}{x^2-4}=3$;

9) $\frac{2}{x-5}-\frac{4}{x+5}=\frac{x^2+15}{x^2-25}$; **10)** $\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2+5x}=\frac{3+x}{x+5}$; **11)** $\frac{12-x}{x^2+6x}+\frac{3}{x^2-6x}=\frac{6}{x^2-36}$;

12) $(x^2+x)^2+2(x^2+x)-8=0$; **13)** $x^3+2x^2-x-2=0$

№17. При яких значеннях x сума дробів $\frac{6}{1+x}$ і $\frac{x}{x-2}$ дорівнює їхньому добутку ?

Відповіді до теми 3:

№1. 1) -60; 2) $\sqrt{3}$; 3) $19+3\sqrt{2}$; 4) 7; 5) 8; 6) 17; 7) 94; 8) $12\sqrt{6}+24$; 9) 33.

№2. $-2a^3b^2$.

№3. 1) $-\sqrt{27a^2}$; 2) $-\sqrt{3}$.

№4. 1) $4\sqrt{2}$; 2) $4(\sqrt{3}+1)$; 3) $\frac{\sqrt{13}+\sqrt{5}}{2}$; 4) $2(\sqrt{5}+\sqrt{3})$.

№5. $-\frac{1}{3}(x-3)(x+6)$.

№6. 1) $\frac{x+3}{2(x+1)}$; 2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; 3) $a+\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{3}$; 5) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-5}$; 6) $\frac{\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+3\sqrt{y}}$.

№7. $x_2=2$; $q=-12$.

№8. $x^2-4x-2=0$.

№9. - 37.

№10. $2x^2-9x-5=0$.

№11. $q=-10$.

№12. $q=-40$.

№13. $x_2=-4$; $p=2{,}5$.

№14. 1000.

№15. $-\frac{a}{2x}$.

№16. 1) 0; -9; 2) 20; 3) 3; 4) 1; 5) 2; 6) 2;
7) -3; 6; 8) 7; 9) 3; 10) 3. 11) 9; 12) -2; 1; 13) -2; -1; 1 .

№17. 3; -4.

Тема 4. **Нерівності**

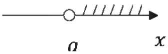
1. Лінійні нерівності з однією змінною.

2. Системи лінійних нерівностей з однією змінною.

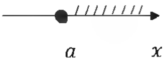
3. Подвійні нерівності.

1.Розв'язування найпростіших лінійних нерівностей.

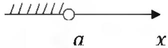
1) $\boldsymbol{x > a}$,
$x \in (a; +\infty)$;



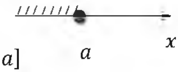
2) $\boldsymbol{x \geq a}$,
$x \in [a; +\infty)$;



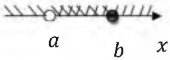
3) $\boldsymbol{x < a}$,
$x \in (-\infty; a)$



4) $\boldsymbol{x \leq a}$,
$x \in (-\infty; a]$



5) $\boldsymbol{a < x \leq b}$,
$x \in (a; b]$



<u>Лінійними нерівностями</u> **називають нерівності виду $ax \geq b, ax \leq b, ax > b$, $ax < b$, де a і b відомі числа, x – замінна. Для розв'язування лінійної нерівності з однією змінною потрібно поділити обидві частини нерівності на a (якщо $a \neq 0$).**

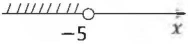
1) При $a > 0$ знак нерівності зберігається.

2) При $a < 0$ знак нерівності змінюється на протилежний.

Наприклад.

1 Розв'язати нерівність: $16 - 3x > 31$;

$$-3x > 31 - 16;$$
$$-3x > 15;$$
$$x < 15:(-3);$$
$$x < -5.$$



Відповідь : $x \in (-\infty; -5)$.

2. Знайдіть найбільше ціле значення x, при якому різниця дробів $\frac{16-3x}{3}$ і $\frac{3x+7}{4}$ є додатною.

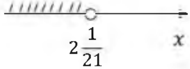
Розв'язання

Маємо нерівність $\frac{16-3x}{3} - \frac{3x+7}{4} > 0$.

Помножимо обидві частини нерівності на 12, так як НСК (3;4) = 12.

$$\frac{12(16-3x)}{3} - \frac{12(3x+7)}{4} > 0$$
$$4(16 - 3x) - 3(3x + 7) > 0;$$
$$64 - 12x - 9x - 21 > 0;$$
$$-21x > 21 - 64;$$
$$-21x > -43;$$
$$x < -43(-21);$$
$$x < \frac{43}{21};$$

Число 2 – найбільше ціле значення x. $x < 2\frac{1}{21}$.



Відповідь: 2.

2. Системи нерівностей з однією змінною

Для розв'язування системи нерівностей треба:

1) Розв'язати кожну нерівність системи.

2) Зобразити множину розв'язків кожної нерівності на одній координатній прямій.

3) Знайти спільні розв'язки нерівностей.

Наприклад.

Знайдіть цілі розв'язки системи нерівностей $\begin{cases} \frac{x}{5} < \frac{x-1}{6}, \\ 2(1-x)+5 > 14-3(x+5). \end{cases}$

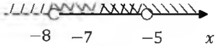
Розв'яжемо цю систему

$\begin{cases} \frac{x}{5} < \frac{x-1}{6} \quad | \cdot 30; \\ 2-2x+5 > 14-3x-15; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \frac{30x}{5} < \frac{30(x-1)}{6}, \\ -2x+3x > 14-15-7\,; \end{cases}$

$\begin{cases} 6x < 5(x-1), \\ x > -8; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 6x < 5x-5, \\ x > -8; \end{cases}$

$\begin{cases} 6x-5x < -5, \\ x > -8; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x < -5, \\ x > -8. \end{cases}$

$x \in$ (-8; -5)- розв'язок систем



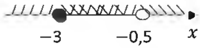
Числа $-7; -6$ – цілі розв'язки системи нерівностей

Відповідь : -7 та $-\ 6$.

3. Для розв'язання **подвійної нерівності** її можна записати у вигляді системи та розв'язати її.

Наприклад, розв'язати подвійну нерівність $4 < 3 - 2\,x \leq 9$, тобто

$\begin{cases} 3-2x > 4, \\ 3-2x \leq 9; \end{cases}$ $\begin{cases} -2x > 4-3, \\ -2x \leq 9-3; \end{cases}$ $\begin{cases} -2x > 1, \\ -2x \leq 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x < -0{,}5, \\ x \geq -3. \end{cases}$



Відповідь: $x \in [-3; -0{,}5)$.

Завдання для самостійного розв'язування до теми 4

№1. **Розв'яжіть нерівність**

1) $\frac{2-x}{5} < -2$; $\quad$ 2) $6x < 16-2x$; $\quad$ 3) $7-14x \geq x-3$.

№2 Знайдіть найменший цілий розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} x-3{,}5 > 5; \\ \frac{x}{2} \geq 6. \end{cases}$

№3 Розв'яжіть систему нерівностей. $\begin{cases} 5+x \leq 2, \\ x-6 \leq 2x. \end{cases}$

№4. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} (x-2)(x+1)-2x \geq (x-3)(x+3)+1, \\ \frac{x+2}{3} > \frac{5-x}{4}. \end{cases}$

№5. Розв'яжіть нерівність $-1 \leq 3 - \frac{x}{4} < 5$.

№6. Знайдіть кількість цілих розв'язків нерівності $-12 < 8x-4 \leq 12$.

№7. **Знайдіть найменше ціле число, що є розв'язком нерівності**

$$(x-3)(x+3)-4x \leq (x-1)^2-5.$$

№8. Знайдіть усі натуральні розв'язки нерівності

$$3 - \frac{1-x}{2} \geq \frac{2x-7}{6} + \frac{7x-2}{3}.$$

№9. Знайдіть цілі розв'язки нерівності $0 < 1 + \frac{2-3x}{2} < 3.$

№10. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} \frac{x+8}{4} < 2, \\ 4 - \frac{5+5x}{3} > 1 - \frac{1-x}{2}. \end{cases}$

№11. Знайдіть найбільше ціле число, яке є розв'язком системи нерівностей

$$\begin{cases} 3 - 5(2x+1) > 7x - 2 \cdot (x+1), \\ 6(1+x) + 2 > 3(1-x) + 7x. \end{cases}$$

Відповіді до теми 4:

№1. 1) $x \in (6\,;\infty)$ 2)$x \in (\infty\,;2)$ 3) $x \in (-\infty\,;\frac{2}{3}]$. **№2.** 12. **№3.** $x \in [-6;-3]$.

№4. $x \in (1;2]$. **№ 5.** $x \in (-8;16]$. **№ 6.** 3. **№ 7.** – 2. **№8.** 1;2. **№9.** 0;1.

№10. $x \in (-\infty;0)$. **№ 11.** – 1

Тема 5. Функції. Види функцій.

Залежність змінної $\boldsymbol{y}$ від змінної $\boldsymbol{x}$ називається ***функцією,*** якщо кожному значенню $\boldsymbol{x}$, відповідає одне і тільки одне значення $\boldsymbol{y}$. Змінну $\boldsymbol{x}$ називають незалежною змінною, або аргументом, а змінну $\boldsymbol{y}$ залежною змінною.

Область визначення функції – це множина тих значень, яких може набувати аргумент $\boldsymbol{x}$. Область визначення позначається $D(\,y\,)$ або $D(\,f\,)$

Область значень функції – це множина, яка складається із всіх чисел $f(x)$, де $\boldsymbol{x}$ належить області визначення. Область значень позначається $E(y)$.

Види функцій:

1. $\boldsymbol{y = k\,x + b}$ – **лінійна функція**, k і b деякі числа; x – змінна. Графіком є пряма.
2. $\boldsymbol{y = k\,x}$ – **пряма пропорційність**. Графіком є пряма, яка проходить через початок координат.
3. $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$ – **обернена пропорційність,** k – деяке число, $x \neq 0$. Графіком є гіпербола.
4. $\boldsymbol{y = a\,x^2 + b\,x + c}$ – **квадратична функція,** a, b, c – деякі числа, $a \neq 0$. Графіком є парабола. Якщо $a > 0$, то гілки параболи направлені вгору, якщо $a < 0$, то гілки параболи направлені вниз.

Координати вершин параболи:

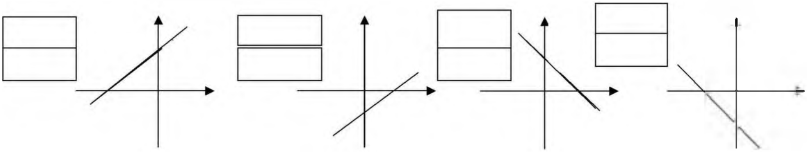
$_0 =$ — – абсциса вершини параболи

$y_0 = y(\ _0)$ або $y_0 =$ — – ордината вершини параболи.

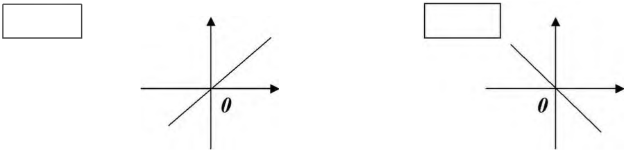
Нулі функції – значення аргументу   при яких функція дорівнює нулю.

Графіки функцій

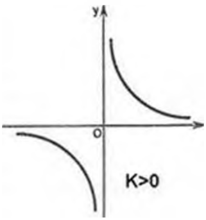
лінійна функція

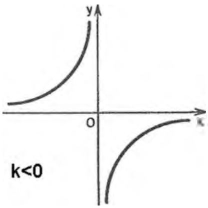


пряма пропорційність.

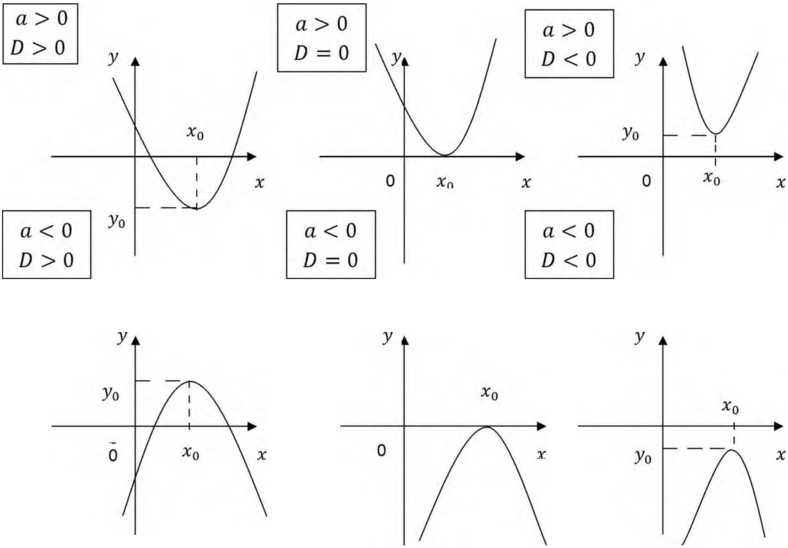


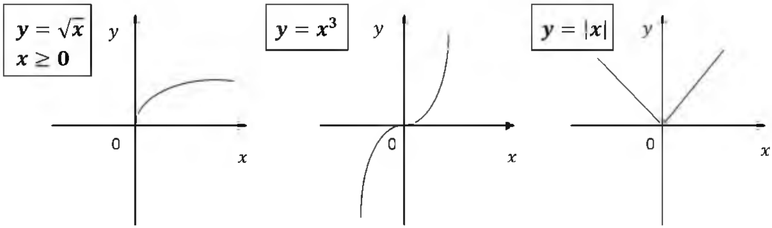
–   обернена пропорційність





$y = \boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ – квадратична функція , $a \neq 0$





<u>Схема знаходження області визначення функції</u> :

1. $y = f(x)$ – многочлен , то ОДЗ: $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

2. $y = \frac{q(x)}{f(x)}$ – дріб, то ОДЗ: $f(x) \neq 0$.

3. $y = \sqrt{f(x)}$, то ОДЗ: $f(x) \geq 0$.

4. $y = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$, то ОДЗ: $f(x) > 0$.

Наприклад .

1. ***Знайдіть координати вершини параболи .***

   $y = x^2 - 2x - 3 \quad (a = 1, b = -2, c = -3)$

   $\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}$

   $x_0 = -\frac{-2}{2\cdot 1} = 1$ – абсциса вершини

   $y_0 = y(1) = 1^2 - 2\cdot 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$ – ордината вершини

   $(1;\ -4)$ – координати вершини

2. ***Знайдіть область значень функції*** $y = -x^2 + 2x + 7$.

   Графіком функції є парабола, гілки якої направлені вниз.

   Координати її вершини

   $x_0 = -\frac{2}{2\cdot(-1)} = 1$; $y_0 = y(1) = 8$. Область значень: Е (у)=$(-\infty;8]$.

3. ***Знайдіть нулі функції.***

   $y = \frac{x^2+5x}{x}$. ОДЗ: $x \neq 0$

   $\frac{x^2+5x}{x} = 0$ при $x^2 + 5x = 0$

   $x(x+5) = 0$

   $x = 0$ – не належить ОДЗ, або $x + 5 = 0$, $x = -5$ – нуль функції.

   Відповідь : -5

Завдання для самостійного розв'язування теми 5

№1. Знайдіть проміжок зростання функції $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$.

№2. Знайдіть проміжок спадання функції $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$.

№3. Знайдіть область визначення функції: 1) $y=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$; 2) $y=\sqrt{2-x}$; 3) $y=\frac{1}{x-2}$.

№4. Задайте формулою обернену пропорційність, якщо її графік проходить через точку $B(4; -2)$.

№5. Знайдіть найбільше значення функції $y = 6x - x^2$.

№6. Знайдіть область значень функції $y = -2x^2+4x$.

№7. Знайдіть область значень функції $y = 3x^3-6x+1$.

№8. Графіком квадратної функції є парабола, що має вершину в початку координат і проходить через точку $A(2; -8)$. Зайдете цю функцію формулою.

№9. Задайте формулою лінійну функцію, графік якої проходить через точки $(1;-5)$ і $(-3; -13)$.

№10. Знайдіть найбільше значення функції $y = -2x^2+8x-5$.

№11. Точка $A(-2;9)$ належить графіку функції $y= ax^2+5x-7$. Знайдіть коефіцієнт a.

№12. Знайдіть найменше значення функції $y = 4x^2- 12x+8$.

№13. Графік функції $y= kx+b$ паралельний осі абсцис і проходить через точку $B(3; -2)$. Знайдіть значення k і b.

№14. Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку $A(-2;3)$.

Відповіді до теми 5:

№1. $x \in[4;+\infty)$;

№2. $x \in[3;+\infty)$;

№3. 1) $x \in(2;+\infty)$; 2) $x \in(-\infty;2]$; 3) $x \in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$

№4. $y=-\frac{8}{x}$;

№5. 9;

№6. $(-\infty; 2]$;

№7. $[-2; +\infty)$

№8. $y=-2x^2$;

№9. $y=2x-7$;

№10. 3;

№11. $a=6{,}5$;

№12. -1;

№13. $k=0$; $b=-2$;

№14. $y=-1{,}5x$.

Тема 6. Квадратні нерівності.

Нерівності виду:
$$\boldsymbol{ax}^2 + \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} > 0,$$
$$\boldsymbol{ax}^2 + \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} < 0,$$
$$\boldsymbol{ax}^2 + \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{ax}^2 + \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{0},$$
де x – змінна, a, b, c – деякі числа, $a \neq 0$ називають **квадратними**.

Наприклад, $2x^2 - 7x + 1 > 0$; $x^2 - 25 < 0$ – квадратні нерівності.

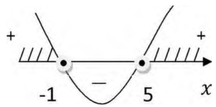
Розв'язування квадратних нерівностей зводять до знаходження проміжків, на яких відповідна функція $y = ax^2 + bx + c$ набуває додатних, від'ємних, не додатних, не від'ємних значень.

Наприклад. Розв'язати нерівність $x^2 - 4x - 5 \geq 0$

Графіком квадратичної функції $y = x^2 - 4x - 5$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору(a=1,$a > 0$)

Знайдемо нулі функції

$x^2 - 4x - 5 = 0$,
$x_1 = 5$, $x_2 = -1$.



Будуємо ескіз графіка функції. Визначаємо , що функція невід'ємна при $x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$

Метод інтервалів.

Якщо ліва частина нерівностей є добутком $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)$, а права частина – 0, тобто $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) > 0$ або < 0, то такі нерівності розв'язуються методом інтервалів.

Нехай $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)$.

<u>Алгоритм розв'язування нерівностей методом інтервалів.</u>

1) Знайти нулі функції $f(x)$=0.
2) Нанести нулі функції на числовій прямій.
3) Дослідити знак функції $f(x)$ у кожному з отриманих інтервалів (на крайньому праворуч, знак «+». На решті проміжків – такі знаки щоб рухаючись справа наліво, ці знаки чергувались)
4) Записати відповідь.

<u>Приклад 1</u>. Розв'язати методом інтервалів нерівність.

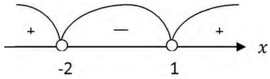
$x^2 + x > 2$

$x^2 + x - 2 > 0$

Знайдемо нулі функції

$x^2 + x - 2 = 0$

$x_1 = -2 \quad x_2 = 1$



Розкладемо на множники квадратний тричлен $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ тоді задана нерівність, рівносильна такій $(x+2)(x-1)>0$.

Позначимо корені x_1, x_2 на числовій прямій і визначимо знак тричлена на кожному з утворених проміжків. Отже, розв'язком нерівності : $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

<u>Приклад 2.</u> Знайдіть найменше ціле число, що є розв'язком нерівності $12+4x - x^2 > 0$.

Розв'язання

Помножимо обидві частини нерівності на (-1), маємо $x^2 - 4x - 12 < 0$

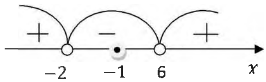
Розкладемо на множники квадратний тричлен $x^2 - 4x - 12$. Для цього знайдемо його корені.

$x^2 - 4x - 12 = 0$,

$x_1 = 6, \quad x_2 = -2$.

Одержимо: $x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2)$, тоді задана нерівність рівносильна такій $(x-6)(x+2) < 0$.

Позначимо корені x_1, x_2 на числовій прямій та визначимо знак тричлена на кожному з утворених проміжків.



Розв'язок нерівності: $x \in (-2; 6)$. Число -1 є найменшим цілим розв'язком нерівності.

Завдання для самостійного розв'язування до теми 6

№1. Розв'яжіть нерівність.

1. $-x^2 + 4x - 3 \le 0$;
2. $x^2 - 2x < 0$;
3. $x^2 - 4x \ge 0$;
4. $2x^2 - x + 1 \le 0$;
5. $x^2 + x - 6 < 0$;
6. $-x^2 + 6x - 5 \ge 0$;
7. $-x^2 - 2x + 3 \le 0$;
8. $(x-5)(x+3) \ge 0$;
9. $(2x+4) \cdot (x - \frac{1}{2}) \le 0$;
10. $x^2 - 25 > 0$;
11. $x^2 \le 49$.

№2. Розв'яжіть нерівність.

1) $(3x+2)^2 + (4x-3)^2 \le (5x-1)^2$; 2) $3x(x-2) + 1 \le (x+1)^2$.

№3. Знайдіть усі цілі розв'язки нерівності .

1) $2x^2 + x - 6 \le 0$;

2) $-2x^2 + 5x - 2 \ge 0$.

№4. При яких значеннях тричлен $-3x^2 + 9x - 2$ набуває значень, більших за $\frac{2}{3}$.

№5. Знайдіть область визначення функції.

1) $y = \sqrt{18 - 9x - 2x^2}$; 2) $y = \frac{\sqrt{2 - x - x^2}}{x}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 3x + 4}}$.

№6. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 2x^2 - 5x - 18 \leq 0; \\ -4x + 8 > 0. \end{cases}$

№7. Знайдіть усі натуральні числа, що є розв'язками системи нерівностей
$\begin{cases} 2x - 9 < 0; \\ 4x^2 - 4x - 3 \geq 0. \end{cases}$

Відповіді до теми 6:

№1. 1) $x \in (-\infty\,; 1] \cup [3\,; +\infty)$; 2) $x \in (0; 2)$; 3) $x \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$;

4) не має розв'язку; 5) $x \in (-3; 2)$; 6) $x \in [1; 5]$;

7) $x \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$; 8) $x \in (-\infty; -3] \cup [5; +\infty)$; 9) $x \in [-2; \frac{1}{2}]$;

10) $x \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$; 11) $x \in [-7; 7]$.

№2. 1) [6;+∞); 2) [0;4]. **№3.** 1) $-2; -1; 0; 1$; 2) 1;2. **№4.** $x \in (\frac{1}{3}; \frac{8}{3})$.

№5 1) $x \in [-6;1{,}5]$; 2) $x \in [-2;0) \cup (0;1]$. **№ 6 .** $x \in [-2; 2)$. **№7.** 2; 3; 4.

<u>Тема 7</u>. Системи рівнянь

1.Системи двох лінійних рівнянь із двома змінними першого степеня.

Розглянемо систему двох лінійних рівнянь із двома змінними $\begin{cases} a_1x + b_1\,y = c_1; \\ a_2x + b_2\,y = c_2. \end{cases}$

1) Якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система має єдиний розв'язок.

2) Якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система має безліч розв'язків.

3)Якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не має розв'язків.

Системи ***двох лінійних рівнянь з двома змінними можна розв'язувати графічним способом, способом підстановки або способом додавання.***
Наприклад.

1) Розв'яжіть систему лінійних рівнянь способом підстановки $\begin{cases} x - 2y = 4, \\ 2x - 5y = 8. \end{cases}$

Виразимо з першого рівняння $\boldsymbol{x}$ через y маємо: $x = 4 + 2y$. Замість x в друге рівняння підставимо

4+2y, маємо: $2(4 + 2y) - 5y = 8,$

$8 + 4y - 5y = 8,$

$-y = 0, \quad y = 0$, отже $x = 4 + 2 \cdot 0,\ x = 4.$

Відповідь: (4;0).

2) Розв'яжіть систему способом додавання $\begin{cases} 4x + 3y = 3; \\ 2x - 2y = 5; \end{cases}$

Помножимо друге рівняння на (-2), одержимо систему $\begin{cases} 4x + 3y = 3, \\ -4x + 4y = -10. \end{cases}$

Додавши почленно рівняння системи, одержимо: $7y = -7,\ y = -1.$

Підставивши в перше рівняння $y=-1$, одержимо:

$4x-3=3$,

$4x=6$,

$x=1{,}5$. Отже $(1{,}5;-1)$– розв'язок даної системи. Відповідь: $(1{,}5;-1)$.

2.Системи рівнянь другого степеня.

Для розв'язування систем рівнянь другого степеня застосовують спосіб підстановки та спосіб додавання.

Наприклад.

1) *Розв'яжіть систему* $\begin{cases} 3x-y=2, \\ 3x^2+y^2=28. \end{cases}$

Виразимо з першого рівняння змінну $\boldsymbol{y}$ через змінну $\boldsymbol{x}$: $-y=-3x+2$; $y=3x-2$.

Підставимо у друге рівняння замість $\boldsymbol{y}$ вираз $3x-2$ і розв'яжемо одержане рівняння з однією змінною $\boldsymbol{x}$:

$3x^2+(3x-2)^2=28$,

$3x^2+9x^2-12x+4-28=0$,

$12x^2-12x-24=0$,

$x^2-x-2=0$,

$x_1=-1$; $x_2=2$.

Отже, $y_1=-5$, $y_2=4$.

Відповідь: $(-1;\ -5), (2;4)$.

2) $\begin{cases} x^2+y^2=26, \\ xy=5. \end{cases}$

Помножимо друге рівняння на 2, одержимо систему $\begin{cases} x^2+y^2=26, \\ 2xy=10. \end{cases}$

Додавши почленно рівняння системи, одержимо: $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=36; \\ xy=5. \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)^2=36; \\ xy=5. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=6 \\ xy=5; \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-6, \\ xy=5; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=6-x; \\ x\cdot(6-x)=5 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-6-x; \\ x(-6-x)=5. \end{cases} \end{array}\right.$$

1) $\begin{cases} y=6-x; \\ -x^2+6x-5=0; \end{cases}$

$x^2-6x+5=0$,

$x_1=5$,

$x_2=1$,

$y_1=6-5=1$,

$y_2=6-1=5$.

2) $\begin{cases} y=-6-x; \\ -6x-x^2-5=0; \end{cases}$

$x^2+6x+5=0$,

$x_3=-5$,

$x_4=-1$,

$y_3=-1$,

$y_4=-5$.

Відповідь: $(5;1), (1;5), (-5;-1), (-1;-5)$.

Завдання для самостійного розв'язування до теми 7

№ 1. Розв'яжіть систему рівнянь.

1) $\begin{cases} \frac{x}{3} + y = 1; \\ y^2 - xy = 7. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y = 3; \\ x^2 - 3xy = 7. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 1; \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x - y = 2; \\ \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x + xy = 6; \\ 3x - 5xy = 39. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 9; \\ 2x - y = 5. \end{cases}$

7) $\begin{cases} y^2 - xy = 2; \\ 2y^2 + 3xy = 14. \end{cases}$

№ 2.

1) Знайдіть координати точок параболи, що є графіком функції $y = x^2 - 2x - 4$ у яких абсциси й ординати рівні між собою.

2) Знайдіть координати точок параболи $y = x^2 - 2x + 4$, у яких сума абсциси та ординати дорівнює 4.

3) Знайдіть координати точок параболи $y = x^2 + 3x - 5$, у яких абсциса й ордината є протилежними числами.

4) При яких значення a і b графік функції $y = ax^2 + bx - 5$ проходить через точки (1;4) і (−2;11)?

5) Знайдіть координати точок параболи $y = x^2 + x - 3$, у яких абсциса на 2 більше за ординату.

6) Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину прямої $x - 2y = 2$ і гіперболи $y = \frac{4}{x}$.

7) На прямій $y = 12 - 1{,}5x$ знайдіть точку, абсциси якої удвічі більше за ординату.

8) При яких значеннях a і с графік функції $y = ax^2 - 2x + c$ проходить через точки A(1;6) і B(2;19)?

9) Графік функції $y = kx + b$ перетинає осі координат у точках A(0;−2) і B(4;0). Знайдіть значення k і b.

10) Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину прямої $x - y + 2 = 0$ з колом $x^2 + y^2 = 4$.

Відповіді до теми 7:

№1:

1) $(-2{,}25;\ 1{,}75)$; $(6;-1)$

2) $(2{,}8;\ 0{,}1)$, $(-1;2)$;

3) $(3;2)$;

4) $(\frac{1}{4};-1)$, $(2;6)$;

5) $(3;-2)$;

6) $(8;11)$; $(2;-1)$

7) $(1;2)$, $(-1;-2)$.

№2:

1) $(4;4)$, $(-1;-1)$;

2) $(0;4)$, $(1;3)$;

3) $(1;-1)$, $(-5;5)$;

4) $a=3$; $b=-2$;

5) $(-1;-3)$, $(1;-1)$;

6) $(-2;-2)$, $(4;1)$;

7) $(6;3)$;

8) $a=5$; $c=3$;

9) $b=-2$; $k=0{,}5$;

10) $(-2;0)$, $(0;2)$.

__Тема 8__. **Відсотки.**

Один відсоток – це одна сота частина будь - якого числа, тобто $1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$.

Тоді $20\% = \frac{20}{100} = 0{,}2$; $3\% = \frac{3}{100} = 0{,}03$; $50\% = \frac{50}{100} = 0{,}5$.

50% числа a дорівнюють $\frac{1}{2}a$.

Задачі на відсотки.

1. **__Знаходження відсотка від числа.__**

Щоб знайти відсоток від числа, потрібно спочатку перетворити відсотки у дріб, а потім число помножити на цей дріб.

Наприклад. Знайти 8% від числа 30.

1) $8\% = 0{,}08$;

2) $30 \cdot 0{,}08 = 2{,}4$.

Відповідь : 2,4.

2. **__Знаходження числа за його відсотком.__**

Щоб знайти число за його відсотком, потрібно спочатку перетворити відсотки у дріб, а потім число поділити на цей дріб.

Наприклад. Знайти число, якщо 24% від нього дорівнює 72.

1)$24\% = 0{,}24$;

2) $72 : 0{,}24 = 300$.

Відповідь : 300.

3. **<u>Знаходження відсоткового відношення двох чисел</u>**.

Щоб знайти, скільки відсотків число a становить від числа b, потрібно поділити a на b і результат помножити на 100% .

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot 100\%}$$

Наприклад. Визначте, скільки відсотків становить число 3 від числа 15.

$\frac{3}{15} \cdot 100\% = 20\%$.

Відповідь : 20%.

Якщо число a зменшити на $p\%$, то одержимо число $a \cdot (1 - \frac{p}{100})$.

Якщо число a збільшити на $p\%$, то одержимо число $a \cdot (1 + \frac{p}{100})$.

<u>Формула простих і складних відсотків.</u>

Якщо банк виплачує клієнтові щомісячно $p\%$ внесеної суми A_0, то на рахунку клієнта через n місяців буде сума : $\boxed{A_n = A_0 \cdot (1 + \frac{p \cdot n}{100})}$ – формула простих відсотків.

Якщо клієнт поклав у банк суму A_0 під $p\%$ річних , то через n років накопичений капітал становитиме : $\boxed{A_n = A_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n}$ - формула складних відсотків.

Завдання для самостійного розв'язування до теми 8

№1. Марічка прочитала 154 сторінки книжки, у якій усього 385 сторінок. Скільки відсотків сторінок їй залишилося прочитати ?

№2. Сплав містить 6% міді. Скільки кілограмів міді в сплаві масою 96 кг ?

№3. Який відсотковий вміст заліза в руді, якщо 300 т руди містить 24 т заліза ?

№4. Який відсоток жирності молока, якщо з 250 кг молока отримали 15 кг жиру ?

№5. Знайдіть відсоткове відношення числа 0,2 до числа $\frac{5}{4}$.

№6. Вкладник поклав до банку 1500 грн. Під який відсоток річних покладено гроші, якщо через рік на рахунку вкладника стало 1725 грн. ?

№7. Яку суму отримає на рахунок вкладник через рік , якщо він поклав до банку 5000 грн під 15% річних ?

№8. Вкладник поклав до банку 10 000 грн. За перший рік йому нарахували 10% річних , а за другий – 12% річних. Який прибуток отримав вкладник через два роки ?

№9. Сплав містить 60% міді, а решту 200 г складає олово. Знайдіть масу сплаву.

№10. Вкладник поклав до банку 10 000 грн. під 16% річних. Скільки відсоткових грошей матиме вкладник через два роки?

№11. За 4 футбольних і 3 волейбольних м'ячі заплатили 320 грн. Після того, як футбольний м'яч подешевшав 20% , а волейбольний м'яч подорожчав на 5% , за 2 футбольних і 1 волейбольний м'ячі заплатили 122 грн. Якою була початкова ціна кожного м'яча?

Відповіді до теми 8:

№1. 60% .

№2. 5,76 кг.

№3. 8%.

№4. 6%.

№5. 16%.

№6. 15%.

№7. 750 грн.

№8. 2320 грн.

№9. 500 г.

№10. 3 456 грн.

№11. 50 грн.; 40 грн.

Тема 9. Прогресії

1. Арифметична прогресія.

2. Геометрична прогресія.

1. Арифметична прогресія.

Числова послідовність $a_1; a_2; a_3; \dots ;\ a_n; a_{n+1} \dots$ називається арифметичною прогресією , якщо кожний її член, починаючи із другого, дорівнює попередньому члену до якого додається одне й те саме число d , де d − різниця арифметичної прогресії , a_1 − перший член , a_2 − другий член , a_n − n-й член , n − число членів.

$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots$ $\boxed{d = a_{n+1} - a_n}$ – ***формула різниці арифметичної прогресії***

$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$ – формула n – го члена арифметичної прогресії

$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n}$

$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\cdot d}{2}\cdot n}$

формула суми n перших членів арифметичної прогресії

Наприклад.

1. Знайти шістнадцятий член арифметичної прогресії (a_n),в якій перший член дорівнює 5, різниця 2.

Дано : (a_n) − арифметична прогресія $a_1 = 5$, $d = 2$.

Знайти : a_{16}.

Розв'язання:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d;}$$

$a_{16} = a_1 + 15d;$

$a_{16} = 5 + 15 \cdot 2 = 35.$

Відповідь : 35.

2. Знайти різницю арифметичної прогресії (a_n) в якій $a_1 = 28$, $a_{21} = -52$.

Дано : (a_n) −арифметична прогресія, $a_1 = 28$, $a_{21} = -52$.

Знайти : d.

Розв'язання:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d;}$$

$a_{21} = a_1 + 20d;$

$-52 = 28 + 20\,d;$

$28+20\,d = -52;$

$20\,d = -80;$ $d = -4.$ Відповідь : − 4.

3. Знайти суму 20-ти перших членів арифметичної прогресії , якщо $a_4 = 9$, $a_{17} = -17$.

Дано : (a_n) −арифметична прогресія, $a_4 = 9$, $a_{17} = -17$.
Знайти : S_{20}.

Розв'язання:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d\ ;}$$

$a_4 = a_1 + 3d;$

$a_{17} = a_1 + 16d;$ За умовою $\begin{cases} a_4 = 9\ ; \\ a_{17} = -17. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} a_1 + 3d = 9, \\ a_1 + 16d = -17; \quad | \cdot (-1) \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 + 3d = 9, \\ -a_1 - 16d = 17. \end{cases}$

Додавши почленно рівняння системи , одержимо :

$-13\,d = 26,$
$d = 26 : (-13),$
$d = -2\,.$

Тоді $a_1 + 3 \cdot (-2) = 9$; $a_1 - 6 = 9$; $a_1 = 9 + 6$; $a_1 = 15$.

$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n}$,

Звідси, $S_{20} = \frac{2 \cdot a_1 + 19d}{2} \cdot 20,$

$S_{20} = \frac{2 \cdot a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = (30 - 38) \cdot 10 = -80.$ Відповідь : -80.

4. Знайти номер члена арифметичної прогресії 8,1 ; 8,5 ; 8,9 , який дорівнює 12,5.

Дано : (a_n) −арифметична прогресія,

$a_1 = 8{,}1$; $a_2 = 8{,}5$; $a_3 = 8{,}9$; $a_n = 12{,}5$.

Знайти : $n-$?

Розв'язання:

1) $d = a_2 - a_1$

$d = 8{,}5 - 8{,}1 = 0{,}4$;

2) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$12{,}5 = 8{,}1 + (n-1) \cdot 0{,}4$;

$(n-1) \cdot 0{,}4 = 12{,}5 - 8{,}1;$

$0{,}4 \cdot (n-1) = 4{,}4;$

$n - 1 = 4{,}4 : 0{,}4;$

$n - 1 = 11$, $n = 12$, тобто $a_{12} = 12{,}5$.

Відповідь : $n = 12$.

5. Скільки додатних членів містить арифметична прогресія 4,6 ; 4,2 ; 3,8 … ?

Дано : (a_n) −арифметична прогресія, $a_1 = 4{,}6$; $a_2 = 4{,}2$; $a_3 = 3{,}8$; $a_n > 0$.

Знайти скільки додатних членів містить арифметична прогресія.

Розв'язання:

1) $\boxed{d = a_2 - a_1}$; $d = 4{,}2 - 4{,}6 = -0{,}4$;

2) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

За умовою $a_n > 0$, маємо $4{,}6 + (n-1) \cdot (-0{,}4) > 0$;

$$4{,}6 - 0{,}4n + 0{,}4 > 0;$$

$$-0{,}4n > -4{,}6 - 0{,}4;$$

$$-0{,}4n > -5;$$

$$n < -5 : (-0{,}4);$$

$$n < 50 : 4;$$

$$n < 12{,}5.$$

Відповідь : 12 додатних членів містить арифметична прогресія.

2. Геометрична прогресія

Числова послідовність $b_1, b_2, b_3, \dots b_n$, b_{n+1} ... називається геометричною прогресію , якщо кожний її член, починаючи із другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число q, де q – знаменник геометричної прогресії , b_1 –перший член , b_2 –другий член , b_n – n-й член , n –число членів.

$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \dots$

$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ – ***формула знаменника геометричної прогресії***

$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$ –***формула n-го члена геометричної прогресії***

$\boxed{S_n = \frac{b_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}}$ - ***формула суми n перших членів геометричної прогресії***

$\boxed{S = \frac{b_1}{1-q}}$ – ***формула суми всіх членів нескінченної геометричної прогресії*** $(|q| < 1)$

Наприклад.

1. Обчислити п'ятий член геометричної прогресії 2, 6, 18 , …

Дано : (b_n) – геометрична прогресія,

$b_1 = 2; b_2 = 6; b_3 = 18.$

Знайти : b_5.

Розв'язання:

1) $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{6}{2} = 3$ – знаменник,

2) $\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$,

$b_5 = b_1 \cdot q^4$,

$b_5 = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$.

Відповідь : 162.

2. ***Обчисліть суму п'яти перших членів геометричної прогресії $(\boldsymbol{b_n})$, якщо $\boldsymbol{b_1 = 12}$, $\boldsymbol{b_4 = 324}$.***

Дано : (b_n) – геометрична прогресія,

$b_1 = 12; b_4 = 324$.

Знайти : S_5.

Розв'язання:

1) $\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$;

$b_4 = b_1 \cdot q^3$;

$324 = 12 \cdot q^3$;

$q^3 = \frac{324}{12}$; $q^3 = 27$; $q = 3$.

2) $\boxed{S_n = \frac{b_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}}$;

$$S_5 = \frac{12 \cdot (1-3^5)}{1-3} = \frac{12 \cdot (-242)}{-2} = 1452.$$

Відповідь: 1452.

3. ***Чому дорівнює перший член геометричної прогресії $(\boldsymbol{b_n})$, якщо $\boldsymbol{b_3 = 5}$, $\boldsymbol{b_6 = 625}$.***

Дано : (b_n) – геометрична прогресія,

$b_3 = 5$; $b_6 = 625$.

Знайти : b_1.

Розв'язання:

$$\begin{cases} b_6 = 625, \\ b_3 = 5. \end{cases}$$

$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^5 = 625 , & (1) \\ b_1 \cdot q^2 = 5; & (2) \end{cases}$$

Поділимо (1) на (2) .

$$\frac{\cancel{b_1} \cdot q^5}{\cancel{b_1} \cdot q^2} = \frac{625}{5} ;$$

$q^3 = 125$;

$q = 5$;

$b_1 \cdot q^2 = 5$;

$b_1 \cdot 5^2 = 5$;

$b_1 = \frac{5}{5^2}$; $b_1 = \frac{1}{5}$.   Відповідь : $\frac{1}{5}$.

4. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії , перший член якої $b_1 = -96$, а знаменник $q = -\frac{1}{3}$.

Дано : (b_n) − нескінченна геометрична прогресія,

$b_1 = -96$; $q = -\frac{1}{3}$.

Знайти : S

Розв'язання :

$$S = \frac{b_1}{1-q} .$$

$$S = \frac{-96}{1-(-\frac{1}{3})} = -\frac{-96}{1+\frac{1}{3}} = -\frac{96}{\frac{4}{3}} = -96 \cdot \frac{3}{4} = -24 \cdot 3 = -72 .$$

Відповідь : − 72.

Завдання для самостійного розв'язування до теми 9

№1. Дано (a_n) −арифметична прогресія, $a_1 = 2$; $d = 2$.

Знайти : a_{50} ; S_{50}.

№2. Дано (a_n) −арифметична прогресія, $a_1 = 1{,}2$; $a_4 = 1{,}8$.

Знайти : d ; S_9.

№3. Дано (a_n) −арифметична прогресія, $a_5 = 14$; $a_{10} = 29$.

Знайти : S_{20}.

№4. Арифметичну прогресію (x_n) задано формулою n –го члена $x_n = -2n - 1$. Знайдіть суму десяти перших членів прогресії .

№5. Скільки додатних членів містить арифметична прогресія 6,2 ; 5,9 ; 5,6 … ?

№6. Знайдіть суму тридцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_{21} = 17$, а різниця прогресії $d = 2$.

№7. Дано геометричну прогресію (b_n). Знайдіть b_4 , якщо $b_1 = -32$, $q = -\frac{1}{2}$.

№8. У геометричній прогресії (b_n), $b_3 = 45$, $q = -3$. Знайдіть перший член цієї прогресії .

№9. Послідовність (b_n) є геометричною прогресією . Знайдіть b_1, якщо $b_5 = 4$; $b_6 = -8$.

№10. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), у якої $b_4 = 36$, $b_6 = 4$.

№11. Знайдіть суму перших п'яти членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 3$, $q = -2$.

№12. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії -6 ; 1 ; $-\frac{1}{6}$; … .

№13. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), якщо $b_3 = 6$; $b_4 = -3$.

№14. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n), якщо $S_3 = 52$, $q = 3$.

№15. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_3 = 5$; $q = \frac{1}{2}$.

№16. Між числами 8 і – 1 вставте два таких числа, щоб вони разом з даними числами утворили чотири послідовних члени арифметичної прогресії .

№17. Знайдіть суму перших семи членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_2 = \frac{1}{2}$; $b_3 = \frac{1}{4}$.

Відповіді до теми 9:

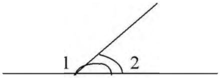
№1. 100; 2550.
№2. 0,2 ; 18.
№3. 610.
№4. – 120.
№5. 21.
№6. 180.
№7. 4.
№8. 5.
№9. $\frac{1}{4}$.
№10. $\pm\frac{1}{3}$.
№11. 33.
№12. $-5\frac{1}{7}$.
№13. 16.
№14. 4.
№15. 40.
№16. 5 ; 2.
№17. $\frac{127}{64}$.

Геометрія

Тема 10. Кути

1.*Суміжні та вертикальні кути.*

Два кути називаються ***суміжними***, якщо в них одна сторона спільна, а інші сторони є доповняльними півпрямими.



$\angle 1$ та $\angle 2$ - суміжні

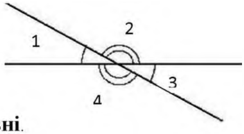
Сума суміжних кутів дорівнює 180^0

$$\boxed{\angle 1 + \angle 2 = 180^0}$$

Два кути називаються ***вертикальними***, якщо сторони одного кута є доповняльними півпрямими сторін другого.

$\angle 1$ та $\angle 3$ – вертикальні

$\angle 2$ та $\angle 4$ – вертикальні



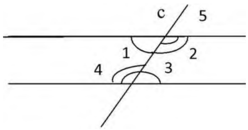
Вертикальні кути рівні.

$$\boxed{\angle 1 = \angle 3} \qquad \boxed{\angle 2 = \angle 4}$$

2.*Внутрішні односторонні та різносторонні кути.*

$\angle 1$ і $\angle 3$, $\angle 2$ і $\angle 4$ — внутрішні різносторонні кути

$\angle 2$ і $\angle 3$, $\angle 1$ і $\angle 4$ — внутрішні односторонні кути



Ознака паралельності прямих:

Якщо $\angle 1 = \angle 3$ (внутрішні різносторонні кути) або $\angle 3 = \angle 5$ (відповідні кути),

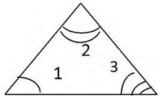
або $\angle 2 + \angle 3 = 180^0$ (сума внутрішніх односторонніх кутів), тоді ∥ .

Властивості паралельних прямих:

Якщо ∥ , тоді $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 3 = \angle 5$, $\angle 2 + \angle 3 = 180^0$.

<u>*Тема 11.*</u> **Трикутники**

1. *Сума кутів трикутника*



Сума кутів трикутника дорівнює 180^0

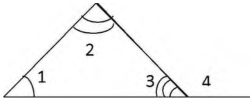
$$\boxed{\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0}$$

2. *Зовнішній кут трикутника*

<u>Зовнішній кут</u> трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних із ним:

$\angle 4$ – зовнішній кут

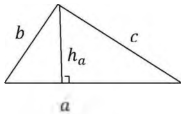
$$\boxed{\angle 4 = \angle 1 + \angle 2}$$



3. *Висота трикутника*

<u>Висотою трикутника</u>, опущеною з даної вершини, називається перпендикуляр, проведений із цієї вершини до прямої, що містить протилежну сторону трикутника.

h_a – висота, проведена на сторону a



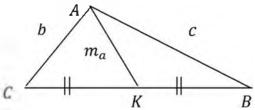
4. *Медіана трикутника.*

<u>Медіаною трикутника</u>, проведеною з даної вершини, називається відрізок, що сполучає вершину із серединою протилежної сторони трикутника.

m_a – медіана, що з'єднує вершину А

із серединою сторони СВ.

К-середина СВ

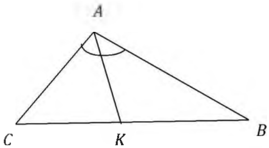


5. *Бісектриса трикутника.*

<u>Бісектрисою трикутника</u>, проведеною з даної вершини, називається відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає цю вершину з точкою на протилежній стороні.

АК – бісектриса трикутника

$\angle CAK = \angle BAK$



Властивість бісектриси кута трикутника:

Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні двом прилеглим сторонам.

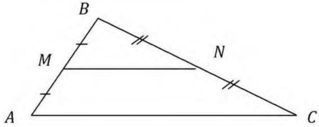
$\boxed{\dfrac{CK}{KB}=\dfrac{AC}{AB}}$ або $\boxed{\dfrac{AC}{CK}=\dfrac{AB}{KB}}$

6. *Середня лінія трикутника*

Середньою лінією трикутника називається відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

Властивості середньої лінії трикутника:

Середня лінія трикутника паралельна третій стороні й дорівнює її половині.



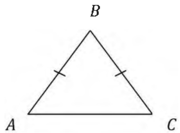
MN – середня лінія ΔABC

1.$MN \parallel AC$;

2.$MN=\frac{1}{2}AC$

7. *Рівнобедрений трикутник.*

Трикутник називається рівнобедреним, якщо в ньому дві сторони рівні. Ці рівні сторони називаються бічними сторонами, а третя сторона називається основою трикутника.



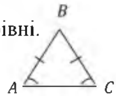
AB = BC

AB, BC – бічні сторони

AC – основа

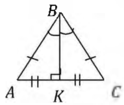
Властивості рівнобедреного трикутника:

1).У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.



$\angle A = \angle C$

2). Медіана рівнобедреного три кутника, проведена до основи, є висотою та бісектрисою.

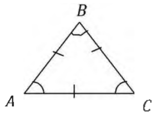


BK – медіана, висота і бісектриса

8. *Рівносторонній трикутник*

Трикутник у якого всі сторони рівні, називається рівностороннім.

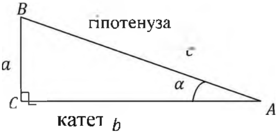
У рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.



$\angle A = \angle B = \angle C = 60^0$.

9. Прямокутний трикутник

$\angle C = 90^0$.
ΔABC – прямокутний
$\angle A + \angle B = 90^0$.
b – прилеглий катет до кута α
a – протилежний катет до кута α.



<u>Теорема Піфагора</u>

У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів:

$\boxed{AB^2 = BC^2 + AC^2}$ або $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

Синусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до гіпотенузи

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$$

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c}}$$

Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до прилеглого катета

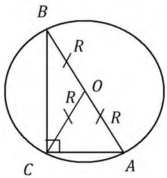
$$\boxed{tg\alpha = \frac{a}{b}}$$

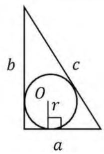
Котангенсом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до протилежного катета

$$\boxed{ctg\alpha = \frac{b}{a}}$$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$a = c \cdot \sin\alpha$	$c = \frac{a}{\sin\alpha}$
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$b = c \cdot \cos\alpha$	$c = \frac{b}{\cos\alpha}$
$tg\alpha = \frac{a}{b}$	$a = b \cdot tg\,\alpha$	
$ctg\alpha = \frac{b}{a}$	$b = a \cdot ctg\,\alpha$	

$\boxed{R = \frac{1}{2} \cdot AB}$ $\boxed{r = \frac{a+b-c}{2}}$

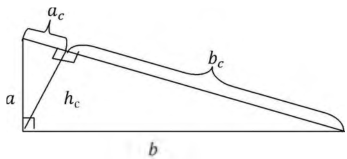




Співвідношення у прямокутному трикутнику:

1. $h_c{}^2 = a_c \cdot b_c$;
2. $a^2 = c \cdot a_c$;
3. $b^2 = c \cdot b_c$

h_c – висота, проведена до гіпотенузи.
a_c – проекція катета a на гіпотенузу c
b_c – проекція катета b на гіпотенузу c.



10. ***Довільний трикутник.***

Теорема косинусів.

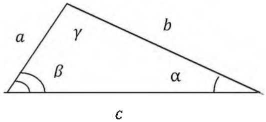
Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін на косинус кута між ними.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

Теорема синусів:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

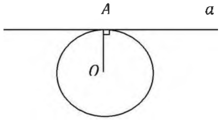


Сторони трикутника пропорційні до синусів протилежних кутів

$$R = \frac{a}{2 \cdot \sin\alpha}$$

R – радіус описаного кола

11. ***Коло. Дотична до кола .***



a – дотична до кола

ОА – радіус кола

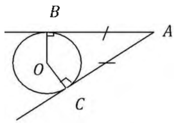
Точка А – точка дотику

Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику: $a \perp OA$.

1. $AB \perp OB$

$AC \perp OC$

2. $AB = AC$.

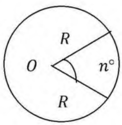


C = 2πR – довжина кола

$l_{дуги} = \frac{\pi R}{180^0} \cdot n°$- довжина дуги

S = π*R*² – площа кола

$S_{сек} = \frac{\pi R^2}{360^0} \cdot n°$ - площа сектора

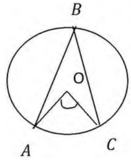


12. *Центральний та вписаний кут*

$\angle AOC$ – центральний кут

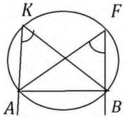
$\angle ABC$ – вписаний кут

$$\boxed{\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \angle AOC}$$



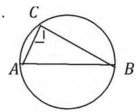
Кут, вписаний у коло дорівнює половині відповідного центрального кута

1) Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, рівні : $\angle K = \angle F$

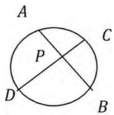


2) Вписаний кут, що спирається на діаметр кола, прямий.

AB – діаметр , $\angle ACB = 90^0$



Властивість хорд кола.

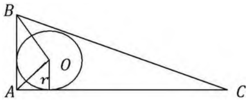


$$\boxed{AP \cdot PB = CP \cdot PD}$$

13. *Вписані й описані трикутники.*

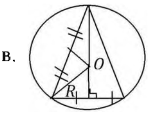
Коло називається вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін

O – центр вписаного кола
Точка O –точка перетину бісектрис



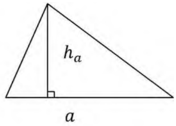
Коло називається описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.

O – центр описаного кола
Точка O – точка перетину серединних перпендикулярів.

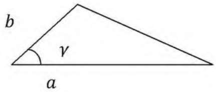


14. *Площа трикутника.*

1. $$S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

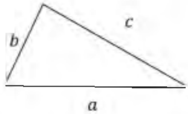


2. $$S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

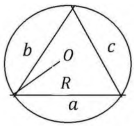


3. $$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S_\Delta = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$$ - формула Герона

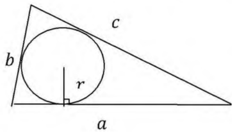


4. $$S_\Delta = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$$ $$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot S_\Delta}$$



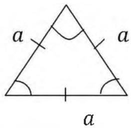
5. $$S_\Delta = p \cdot r$$ $$r = \frac{S_\Delta}{p}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$



Площа рівностороннього трикутника

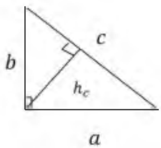
$$S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$



Площа прямокутного трикутника

1. $$S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot b$$

2. $$S_\Delta = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$



15. ***Подібність трикутників.***

Два трикутники називаються подібними, якщо відповідні кути рівні, а сторони пропорційні.

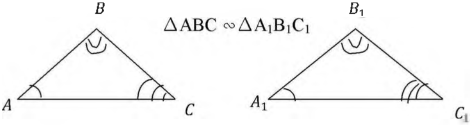
1. $\angle A = \angle A_1$

$\angle B = \angle B_1$

$\angle C = \angle C_1$

2. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$

$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$



Ознаки подібності трикутників

1. За двома кутами:

Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

2. За двома сторонами й кутом між ними:

Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника, і кути, утворені цими сторонами, рівні, то трикутники подібні.

3. За трьома сторонами:

Якщо сторони одного трикутника пропорційні сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

Відношення площ подібних трикутників

Якщо $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$, тоді

1. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{P_\Delta ACB}{P_\Delta A_1B_1C_1} = k$

2. $\frac{S_\Delta ACB}{S_\Delta A_1B_1C_1} = k^2$, де k – коефіцієнт подібності

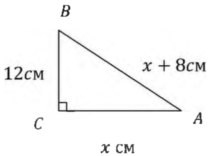
Задача 1. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а інший на 8 см менший за гіпотенузу. Знайдіть периметр трикутника.

Дано: ΔABC – прямокутний

$\angle C = 90^0$. BC = 12 см

AC < AB на 8 см

Знайти: $P_{\Delta ABC}$.



Розв'язання

Нехай AC = x см (x > 0) тоді AB = x + 8 см

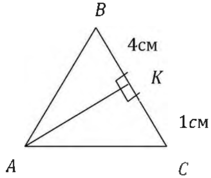
За теоремою Піфагора $AB^2 = BC^2 + AC^2$;

$(x + 8)^2 = 12^2 + x^2$;

$x^2 + 16x + 64 = 144 + x^2$;
$16x = 80$
$x = 5$
AC = 5 см, AB = 13 см.

$P_{\Delta ABC}$ = AB + BC + AC = 13 + 12 + 5 = 30 см.
Відповідь: 30 см.

Задача 2.У рівнобедреному трикутнику висота, що проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки завдовжки 4 см і 1 см, рахуючи від вершини кута між бічними сторонами. Знайдіть основу рівнобедреного трикутника.



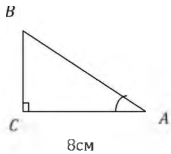
Дано: ΔABC – рівнобедрений з основою AC
AB = BC
$AK \perp BC$, BK = 4 см, KC = 1 см
Знайти: AC.

1. BC = BK + KC = 4 + 1 = 5 см
AB = BC = 5 см

2. ΔAKB – прямокутний. $\angle K = 90^0$.
За теоремою Піфагора $AK^2 = AB^2 - BK^2$;
$AK^2 = 5^2 – 4^2$;
$AK^2 = 25 – 16 = 9$
AK = 3 см.

3. ΔAKB – прямокутний.
За теоремою Піфагора $AC^2 = AK^2 + KC^2$;
$AC^2 = 3^2 + 1^2$;
$AC^2 = 10$
AC = $\sqrt{10}$ см.
Відповідь: $\sqrt{10}$ см.

Задача 3. У ΔABC, $\angle C = 90^0$, AC = 8 см. $\sin\angle A = \frac{3}{5}$. Знайдіть довжину гіпотенузи трикутника.



Дано: ΔABC – прямокутний
$\angle C = 90^0$. AC = 8 см, $\sin\angle A = \frac{3}{5}$

Знайти: $P_{\Delta ABC}$.

Розв'язання

За означенням синуса $\sin\angle A = \frac{BC}{AB}$; $\frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$

Нехай x – коефіцієнт пропорційності (x > 0), тоді BC = 3x см, AB = 5x см.

За теоремою Піфагора
$AB^2 = BC^2 + AC^2$
$(5x)^2 = (3x)^2 + 8^2$
$25x^2 = 9x^2 + 64$

$16x^2 = 64$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$ ($x > 0$), тоді $x = 2$.

Отже, $AB = 5 \cdot 2 = 10$ см.

Відповідь: 10 см.

Задача 4.Дві сторони трикутника відносяться як 5 : 3, а кут між ними дорівнює 120^0. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо його периметр дорівнює 45 см.

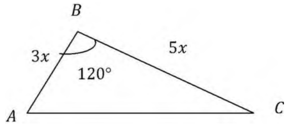
Дано: ΔABC

$BC : AB = 5 : 3$

$\angle B = 120^0$.

$P_{ABC} = 45$ см

Знайти: AC.



Розв'язання

Нехай x – коефіцієнт пропорційності, тоді $BC = 5x$ см, $AB = 3x$ см.

За теоремою косинусів:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$;

$AC^2 = (3x)^2 + (5x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 5x \cdot \cos 120^0$;

$AC^2 = 9x^2 + 25x^2 - 2 \cdot 15x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$;

$AC^2 = 49x^2$;

$AC = 7x$

$P = AB + BC + AC$;

$P = 3x + 5x + 7x$;

$P = 15x$;

За умовою $P_{ABC} = 45$ см, тоді $15x = 45$; $x = 3$

Отже, $AC = 7 \cdot 3 = 21$ см.

Відповідь: 21 см.

Задача 5.У ΔABC $AC = 2\sqrt{2}$ см, $AB = 2\sqrt{3}$ см, $\angle B = 45^0$. Знайдіть градусну міру $\angle C$.

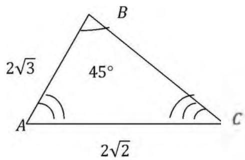
Дано: ΔABC

$AC = 2\sqrt{2}$ см

$AB = 2\sqrt{3}$ см,

$\angle B = 45^0$.

Знайти: $\angle C$.



Розв'язання

За теоремою синусів:

$$\frac{AC}{\sin\angle B}=\frac{AB}{\sin\angle C}$$

$$\sin\angle C=\frac{AB\cdot\sin\angle B}{AC} \quad ; \qquad \sin\angle C=\frac{2\sqrt{3}\cdot\sin 45^0}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin\angle C=\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}} \quad ; \qquad \sin\angle C=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

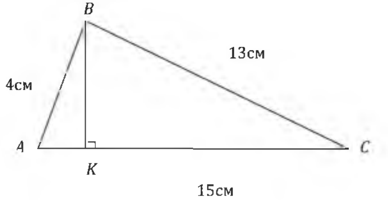
$\angle C=60^0$ або $\angle C=120^0$

Відповідь: 60^0 або 120^0

Задача 6. Знайти висоту трикутника проведену до найбільшої сторони трикутника зі сторонами 4 см, 13 см, 15 см.

Дано: ΔABC

AB = 4 см
BC = 13 см,
AC = 15 см
$BK \perp AC$
Знайти: BK.



Розв'язання

$$1.\ p=\frac{AB+BC+AC}{2}=\frac{4+13+15}{2}=\frac{32}{2}=16\text{см}$$

За формулою Герона :

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p\cdot(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$$

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{16\cdot(16-4)(16-13)(16-15)}=\sqrt{16\cdot12\cdot3\cdot1}=\sqrt{4^2\cdot4\cdot3\cdot3}=\sqrt{4^2\cdot2^2\cdot3^2}=4\cdot2\cdot3=24\text{см}^2$$

$$2.\ S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BK$$

$$24=\frac{1}{2}\cdot15\cdot BK$$

$$BK=\frac{24\cdot2}{15}$$

$BK=\frac{16}{5}$; BK = 3,2 см.

Відповідь: 3,2 см.

Завдання для самостійного розв'язування до теми 11

№1. Сума двох сторін трикутника, кут між якими 60°, дорівнює 11 см, а довжина третьої сторони дорівнює 7 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

№2. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо катет дорівнює 6 см, а протилежний кут 60°.

№3. Градусні міри кутів трикутника відносяться як 2:3:4. Знайдіть кути трикутника.

№4. У гострокутному трикутнику ABC, BM- висота, проведена до сторони AC. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо BC = 10см, AM = 4см, MC = 8см.

№5. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6см і 8см. Знайдіть висоту трикутника, що проведена до гіпотенузи.

№6. У трикутнику ABC сторони AC і AB відповідно дорівнюють 7см і 5см, а сторона BC = 8см. Знайдіть $\cos A$ трикутника ABC.

№7. Сторони трикутника відносяться як 3:4:5. Знайдіть найбільшу сторону подібного йому трикутника, периметр якого дорівнює 36см.

№8. Сторона трикутника дорівнює 12 см, а радіус описаного кола $4\sqrt{3}$см. Чому дорівнює градусна міра кута трикутника, протилежного до даної сторони?

№9. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 9 см, а один з катетів 6 см. Знайдіть проекцію даного катета на гіпотенузу.

№10. З точки M до прямої *a* проведено перпендикуляр MN і похилу MK. Знайдіть довжину проекції похилої, якщо MN = 12см, MK = 13см.

№11. У ΔABC знайдіть $\angle B$, якщо AB= $\sqrt{3}$ см , AC = $\sqrt{2}$ см , $\angle C = 60°$.

№12. Пряма, яка паралельна стороні AB трикутника ABC, перетинає сторони CA і CB цього трикутника в точках M і N відповідно. AB = 15см, MN = 6см, AM = 3см. Знайдіть довжину сторони AC.

№13. Довжини сторін трикутника відносяться як 6 : 7 : 8. Знайдіть периметр подібного йому трикутника, середня за довжиною сторона якого дорівнює 21см.

№14. У прямокутному трикутнику один з катетів дорівнює 4дм, а гіпотенуза 5дм. Знайдіть площу трикутника.

№15. Дві сторони трикутника дорівнюють $6\sqrt{2}$ см і 10см , а кут що лежить проти більшої з них - 45°. Знайдіть третю сторону трикутника.

№16. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 45°, а висота, проведена до основи, 8см.Знайдіть площу цього трикутника.

№17. З точки до прямої проведено похилу, довжина якої дорівнює 12см. Знайдіть проекцію похилої на пряму, якщо похила утворює з прямою кут 30°.

№18. У ΔABC $\angle C=90°$, AC=8см, $\sin A = \frac{3}{5}$. Знайдіть довжину гіпотенузи трикутника.

№19. Катет прямокутного трикутника відноситься до гіпотенузи як 5 : 13. Знайдіть периметр трикутника, якщо його другий катет дорівнює 24см.

№ 20. У трикутнику ABC кут C – тупий. BC=15см, AB=20см, BK – висота трикутника, BK=12см. Знайдіть довжину сторони AC.

Відповіді до теми 11.

№1. 3см і 8см	**№7**. 15см	**№13**. 63см
№2. $4\sqrt{3}$ см	**№8**. 60° або 120°	**№14**. 6дм²
№3. 40°; 60°; 80°	**№ 9**. 4см	**№15**. 14см
№4. 36см²	**№10**. 5см	**№16**. 64см²
№5. 4,8см	**№11**. 45° або 135°	**№17**. $6\sqrt{3}$ см
№6. $\frac{1}{7}$	**№12**. 5см	**№18**. 10 см
		№ 19. 60см.
		№ 20. 7 см

<u>Тема12</u>. Чотирикутники

1. Паралелограм

2. Ромб

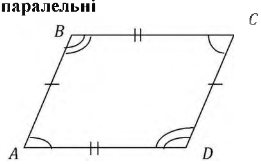
3. Прямокутник. Квадрат.

4. Трапеція

5. Многокутник. Вписані й описані многокутники.

Паралелограм

<u>Паралелограм</u> - це чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні



<u>Властивості паралелограма</u>:

1) Протилежні кути рівні.

$\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$.

2) Протилежні сторони рівні

AB = CD; BC = AD.

3) Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл

4) $P_{ABCB} = 2\,(AB + BC)$

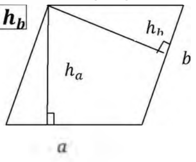
5) Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін

$\boxed{d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)}$

6) $\angle A + \angle B = 180°$; $\angle C + \angle D = 180°$

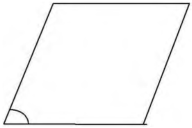
Площа паралелограма

1) Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони. $\boxed{S = a \cdot h_a = b \cdot h_b}$

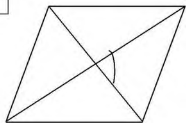


2) Площа паралелограма дорівнює добутку двох його сторін на синус кута між ними.

S=

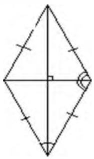


3) Площа паралелограма дорівнює половині добутку діагоналей на синус кута між ними S= – · ·



Ромб

Ромб **- це паралелограм, у якого всі сторони рівні** AB = BC = CD = AD



Властивості ромба

1) Протилежні кути рівні ∠ A=∠ C; ∠ B=∠ D.

2) Діагоналі ромба точкою перетину діляться навпіл.

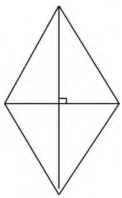
3) Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом

4) Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.

5) = 4·AB

6) Сума квадратів діагоналей ромба дорівнює сумі квадратів його сторін

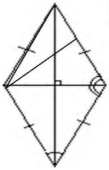
= **4**

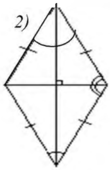


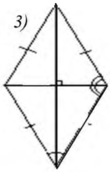
7) ∠ A+∠ B=180°

∠ C+∠ D=180°

Площа ромба

1) 

2) 

3) 

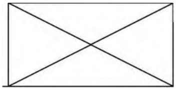
—

Прямокутник

<u>Прямокутник</u> - це паралелограм, у якого всі кути прямі

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

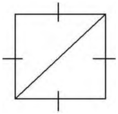
<u>Властивості прямокутника:</u>

1. Протилежні сторони рівні AB = CD; BC = AD
2.  Діагоналі точкою перетину діляться навпіл AO = OC=BO=OD

3.Діагоналі прямокутника рівні AC = BD

4.P= 2 · (AB + BC)

5. S= AB · BC



Квадрат

<u>Квадрат</u>-це прямокутник, у якого всі сторони рівні.

AB = BC = CD = AD

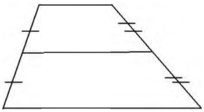
P = 4 · 2
—

Трапеція

<u>Трапеція</u> **- чотирикутник, у якого тільки дві протилежні сторони паралельні**. Ці паралельні сторони називаються **основами трапеції**, а дві інші сторони називаються **бічними сторонами**.

Трапеція, у якої бічні сторони рівні, називається **рівнобічною**.

2) Відрізок, який сполучає середини бічних сторін трапеції, називається **середньою лінією трапеції.**



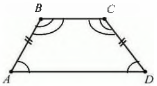
- середня лінія трапеції.

Властивості середньої лінії трапеції:

Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсуми

1.

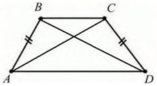
2. –



3) Властивості рівнобічної трапеції.

1. У рівнобічній трапеції кути при основі рівні .

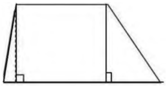
∠ A=∠ D; ∠ B =∠ C



2. У рівнобічній трапеції діагоналі рівні .

Площа трапеції

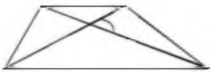
1) **S_{ABCB} = ——— · CK**

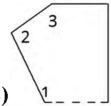


СК- висота

2) **S_{ABCB} = –**

– діагоналі трапеції.





Многокутники

1. **Сума внутрішніх кутів опуклого** *n* **– кутника дорівнює 180° (2)**

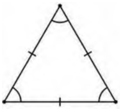
∠ 1+∠ 2+…+∠*n* 180° (*n* 2)

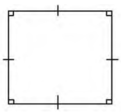
2. **Сума зовнішніх кутів опуклого** *n* **– кутника, узятих на одному при кожній вершині, дорівнює 360°.**

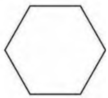
3. **Многокутник** називається **<u>вписаним</u>** у коло, якщо всі його вершини лежать на колі.

4. **Многокутник** називається **<u>описаним</u>** навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до деякого кола.

5. **Опуклий многокутник** називається **<u>правильним</u>**, якщо в ньому всі сторони рівні й усі кути рівні.







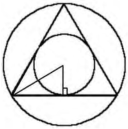
правильний трикутник (рівносторонній трикутник) правильний чотирикутник (квадрат) правильний шестикутник

6. $\boxed{\ = \text{―――}\ }$ – градусна міра внутрішнього кута правильного n – кутника

―― – градусна міра центральний кута правильного n – кутника

Формули радіусів вписаного і описаного кіл для правильних многокутників

Правильний трикутник



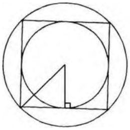
R = —;

—— ;

= ‾ · R;

= 2 ‾

Правильний чотирикутник



R = —;

= —;

= ‾ · R;

Правильний шестикутник

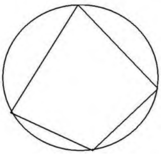
R = ;

r = ——;

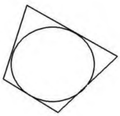
= R;

= —

Вписані і описані чотирикутники



$\angle A + \angle C = 180°$; $\angle B + \angle D = 180°$



Задача 1

Висота, проведена з вершини тупого кута рівнобічної трапеції, ділить її основу на відрізки завдовжки 8см та 2см. Знайти середню лінію трапеції.

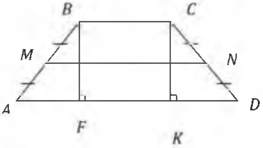
Дано: ABCD – рівнобічна трапеція

СК ⊥ AD

AK= 8см, KD = 2см

MK – середня лінія

Знайти: MN



Розв’язання

1)$AD = AK + KD$

$AD = 8 + 2 = 10$см

2) Проведемо $BF \perp AD$

$FDCK$ – прямокутник

$\Delta ABF = \Delta DCK$ (за гіпотенузою та катетом)

$AF = KD = 2$см

$FK = AK - AF = 8 - 2 = 6$см

$BC = FK = 6$см

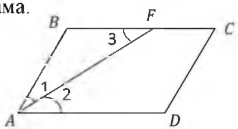
3)За властивістю середньої лінії трапеції маємо:

$MN = \frac{BC+AD}{2} = \frac{6+10}{2} = 8$см

Відповідь: 8 см.

Задача 2

У паралелограмі ABCD бісектриса кута A ділить сторону BC на відрізки BF =4 см, FC = 5см. Знайдіть периметр паралелограма.



Дано: ABCD паралелограм

AK – бісектриса

BF = 4см, FC = 5см

Знайти: P_{ABCD}

Розв’язання

1) ∠ 1 = ∠ 2 , оскільки AF – бісектриса

∠ 2 = ∠ 3, як внутрішні різносторонні кути при BC||AD та січний AF

Звідси ∠ 1 = ∠ 3. Отже ΔABF – рівнобедрений с основою AF, AB = BF, як бічні сторони рівнобедреного трикутника

AB = 4см

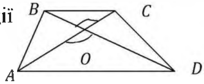
2) $BC = BF + FC = 4 + 5 = 9$см

3) $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + BC) = 2 \cdot (4 + 9) = 26$см

Відповідь: 26см

Задача 3

Діагоналі трапеції ABCD ($AD||BC$) перетинаються в точці O та BO : OD = 3 : 4, BC = 18см. Знайдіть основу AD трапеції



Розв'язання

Розглянемо ΔBOC та ΔDOA

$\angle$ BOC = $\angle$ DOA, як вертикальні

$\angle$ BCO = $\angle$ DOA, як внутрішні різносторонні кути при BC || AD ті січній AC

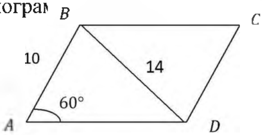
ΔBOC ~Δ DOA за двома кутами

Звідси, $\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD}$. Маємо, $\frac{3}{4} = \frac{18}{AD}$; AD = $\frac{4 \cdot 18}{3}$; AD = 24 см

Відповідь: 24см.

Задача 4

Одна із сторін паралелограма 10см, менша діагональ 14см, а гострий кут 60°. Знайдіть периметр та площу цього паралелограма



Дано: ABCD – паралелограм

AB =10см

BD =14см

$\angle$ A =60°

Знайти: P_{ABCD}; S_{ABCD}

Розв'язання

1) Розглянемо ΔABD За теоремою косинусів

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot cos\angle A$;

$14^2 = 10^2 + AD^2 - 2 \cdot 10 \cdot AD \cdot \frac{1}{2}$;

Нехай $AD = x$ см, (x □ 0)

$196 = 100 + x^2 - 10 \cdot x$;

$x^2 - 10x - 96 = 0$

$D = 100 - 4 \cdot (-96) = 484$

$\sqrt{D} = \sqrt{484} = 22$

$x_1 = \frac{10+22}{2} = 16$

$x_2 = \frac{10-22}{2} = -6$ – не задовольняє умову задачі

Звідси, AD =16см

$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot (10+16) = 52$см

2) $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot sin\angle A$

$S_{ABCD} = 10 \cdot 16 \cdot sin\,60° = 10 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 80\sqrt{3}$ см²

Відповідь: 52 см; $80\sqrt{3}$ см²

Задача 5

Діагоналі ромба відносяться як 3:4. Знайти висоту ромба, якщо його периметр дорівнює 80см.

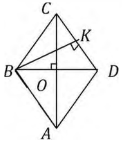
Дано: ABCD – ромб

BD:AC = 3:4

$P_{ABCD} = 80$см

$BK \perp CD$

Знайти: BK



Розв'язання

1) За умовою $P_{ABCD} = 80$см, звідси $CD = \frac{P_{ABCD}}{4}$; $CD = \frac{80}{4} = 20$см

2) За властивістю ромба

$AC \perp BD$, ΔCOD –прямокутний трикутник

$CO = \frac{1}{2} AC$; $OD = \frac{1}{2} BD$.

Нехай x- коефіцієнт пропорційності, тоді BD = 3x см, AC = 4x см, CO = 1,5 x см, OD = 2x см.

За теоремою Піфагора $CD^2 = CO^2 + OD^2$;

$CD^2 = (1,5x)^2 + (2x)^2$;

$20^2 = 2,25x^2 + 4x^2$;

$6,25\ x^2 = 20^2$;

2,5 x = 20;

x = 20:2,5

x = 8

Звідси, $BD = 3 \cdot 8 = 32$см

3) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$

$S_{\ ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 24 = 384$ см²

З іншого боку $S_{ABCD} = CD \cdot BK$

$20 \cdot BK = 384$

$BK = \frac{384}{20}$

BK = 19,2 см

Відповідь: 19,2 см.

Завдання для самостійного розв'язування до теми 12

№1. Знайдіть площу ромба, периметр якого дорівнює $16\sqrt{2}$ см, а один з кутів 135°.

№2. Знайдіть довжину сторін квадрата, вписаного у коло, радіус якого дорівнює 5см.

№3. Діагональ паралелограма завдовжки 4 см перпендикулярна до однієї із сторін і утворює кут 60° з іншою стороною. Знайдіть площу паралелограма.

№4. Радіус кола, вписаного в правильний трикутник, дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Обчисліть периметр трикутника.

№5. Периметр правильного шестикутника дорівнює 48см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього шестикутника.

№6. Сторони п'ятикутника відносяться як 2 : 3 : 4 : 5 : 6. Знайдіть найменшу сторону подібного йому п'ятикутника, у якого периметр дорівнює 80см.

№7. Сторони паралелограма дорівнюють 5см і $2\sqrt{2}$ см, а один з його кутів дорівнює 45°. Знайдіть довжину більшої з діагоналей паралелограма.

№8. Зовнішній кут правильного многокутника становить $\frac{1}{5}$ внутрішнього кута. Знайдіть кількість сторін цього многокутника.

№9. Навколо рівностороннього трикутника описано коло радіуса 4 см. Знайдіть площу цього трикутника.

№10. Сторони чотирикутника відносяться як 2 : 3 : 3 : 4. Знайдіть периметр подібного йому чотирикутника, найбільша сторона якого дорівнює 20см.

№11. Знайдіть градусну міру тупого кута ромба , якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює 20°.

№12. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює 60°. Більша бічна сторона і більша основа дорівнюють по 12см. Знайдіть середню лінію трапеції.

№13. Діагональ квадрата дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо цього квадрата та радіус вписаного кола.

№14. У прямокутній трапеції більша діагональ дорівнює 15см, висота 12 см, а менша основа 4 см. Знайдіть більшу бічну сторону трапеції.

№15. Точка O – точка перетину діагоналей трапеції ABCD з основами AD і BC, AD = 9см, BC =6см. Знайдіть довжини відрізків DO і BO, якщо їх різниця дорівнює 2 см.

№16. Сторона правильного трикутника, вписаного в коло, дорівнює $4\sqrt{6}$ см. Знайдіть сторону квадрата, вписаного у це коло.

№17. Градусна міра одного з кутів, утворених при перетині бісектриси кута паралелограма з його стороною, дорівнює 42°. Знайдіть градусну міру тупого кута паралелограма.

№18. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює 45°. Менша бічна сторона і менша основа трапеції – по 6 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

№19. Знайдіть площу круга, вписаного у квадрат, площа якого дорівнює 12 см ^{2}.

№20. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута й утворює з більшою основою кут 30°. Знайти периметр трапеції, якщо більша основа 8см.

Відповіді до теми 12:

№1. $16\sqrt{2}$ см ^{2}

№2. 5 $\sqrt{2}$ см

№3. 16 $\sqrt{3}$ см ^{2}

№4. 36см

№5. 8см

№6. 8см

№7. $\sqrt{53}$см

№8. 12

№9. $12\sqrt{3}$ см^2

№10. 60см

№11. 110°

№12. 9см

№13. $3\sqrt{2}$ см; 3 см

№14. 13 см

№15. 6 см , 4 см

№16. 8 см

№17. 96°

№18. 9см

№19. 3π см^2

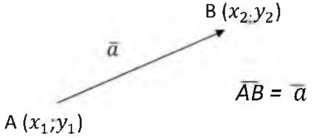
№ 20. 20см

Тема13 Вектори на площині

1. **Вектором називається напрямлений відрізок.**

Точка A - початок вектора $\bar{a}$

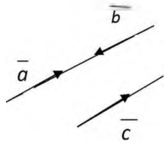
Точка B - кінець вектора $\bar{a}$



$a_1 = x_2 - x_1$
$a_2 = y_2 - y_1$ – координати вектора $\bar{a}$
$\bar{a}\,(a_1;a_2)$

2. $\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$ - ***модуль вектора $\bar{a}$ або довжина вектора $\bar{a}$***

3. ***<u>Колінеарні вектори</u>*** – **вектори , що лежать на одній прямій або на паралельних прямих.**



$\bar{a}$ та $\bar{c}$ – співнапрямлені вектори

$\bar{a}$ та $\bar{b}$ – протилежно напрямлені вектори

Якщо вектори $\bar{a}\,(a_1;a_2)$ і $\bar{b}\,(b_1;b_2)$ <u>колінеарні</u> , то

відповідні координати пропорційні : $\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}}$

4. **Сума векторів** :

$\bar{a}\,(a_1;a_2) + \bar{b}\,(b_1;b_2) = \bar{c}\,(a_1 + b_1;\, a_2 + b_2)$

5. **Різниця векторів** :

$\bar{a}\,(a_1;a_2) - \bar{b}\,(b_1;b_2) = \bar{d}\,(a_1 - b_1;\, a_2 - b_2)$

6. **Множення вектора на число :**

$\lambda \cdot \bar{a}(a_1; a_2) = \bar{b}(\lambda \cdot a_1; \lambda \cdot a_2)$

7. **Скалярний добуток векторів $\bar{a}\,(a_1;a_2)$ і $\bar{b}\,(b_1;b_2)$** :

$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$, або

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\varphi$, де φ – кут між $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

8. **Косинус кута між векторами**

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$$

9. Якщо $\bar{a}\ (a_1;a_2)$ і $\bar{b}\ (b_1;b_2)$**перпендикулярні** , то скалярний добуток дорівнює нулю,

тобто якщо $\bar{a} \perp \bar{b}$, то $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

Задача 1.

Дано : $\bar{a}(-2;1)\bar{b}(3;-1)$

Знайти : 1) $\bar{m} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$;

2) $|\bar{a}|$;

3) $|\bar{b}|$;

4) $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

Розв'яання:

1) $\bar{m} = 2\bar{a} - 3\bar{b} = 2(\overline{-2;1}) - 3(\overline{3;-1}) = (\overline{-4;2}) - (\overline{9;-3}) = (\overline{-4-9;2-(-3)}) =$
$=(\overline{-13;5})$;

2) $|\bar{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$;

3) $|\bar{b}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$;

4) $\bar{a} \cdot \bar{b} = -2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = -6 - 1 = -7$.

Задача 2.

Дано : $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$,

$\angle(\bar{a};\bar{b}) = 120°$.

Знайти : $(\bar{a} + 2\bar{b})(\bar{a} - \bar{b})$.

Розв'яання:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\angle(\bar{a};\bar{b}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 120° = -\frac{1}{2}$;

2) $(\bar{a} + 2\bar{b})(\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a}^2 \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} + 2\bar{a}\bar{b} - 2\bar{b}^2 = |\bar{a}|^2 + \bar{a} \cdot \bar{b} - |\bar{b}|^2 = 1 - \frac{1}{2} - 2 = -1{,}5$.

Завдання для самостійного розв'язування до теми № 13

№1. Знайдіть координати вектора $\bar{c} = -\frac{1}{3}\bar{a} + 2\bar{b}$, якщо $\bar{a}(-6;3)$, $\bar{b}(-2;0{,}5)$

№2. Знайдіть модуль вектора $\overline{MN}$, якщо $M(3;-2), N(-1;-3)$

№3. При якому значенні x вектори $\bar{m}(-2;3)$ та $\bar{n}(x;-12)$ колінеарні?

№4. При яких значеннях m вектори $\bar{a}(2m;-1)$ і $\bar{b}(-8;m)$ колінеарні?

№5. Знайдіть косинус кута між векторами $\bar{a}(0;-3)$ і $\bar{b}(4;-3)$

№6. При якому значенні x вектори $\bar{c}(3;9)$та $\bar{d}(3;x)$ перпендикулярні?

№7. Дано вектори $\bar{m}(-3;0)$ і $\bar{n}(-2;2)$. Знайдіть кут між векторами $\bar{m}$ і $\bar{n}$.

№8. Знайдіть координати вектора $\bar{c}$, якщо $\bar{c} = 3\bar{a} - 2\bar{b}$, $\bar{a}(-1;1)$, $\bar{b}(2;-3)$

№9. Модуль вектора $\bar{a}\ (p+1;-3)$ дорівнює 5. Знайдіть p.

№10. Обчисліть скалярний добуток $(\bar{a} - \overline{2b}) \cdot (\bar{a} + \bar{b})$, якщо $|\bar{a}| = \sqrt{2}$, $|\bar{b}| = 1$,
$\angle(\bar{a};\bar{b}) = 135°$.

Відповіді до теми №13:

№1. $(\overline{-2;0})$ **№4**. -2 ; 2 **№ 7**. $45°$ **№10**. 1

№2. $\sqrt{17}$ **№5**. $\frac{3}{5}$ **№8**. $(\overline{-7;9})$

№3. 8 **№6**. -1 **№9**. -5 ; 3

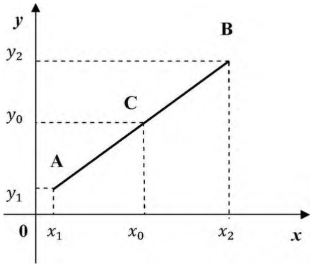
Тема 14. Координати на площині . Рівняння кола. Рівняння прямої.

1. Нехай дано дві точки A(x_1; y_1) і B(x_2;y_2) та C(x_0;y_0) – середина відрізка AB, тоді

$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$

$y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$

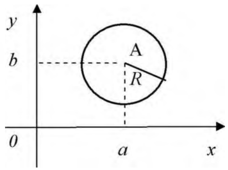
координати середини відрізка



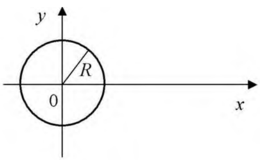
AB=$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ – ***відстань між точками***

(або довжина відрізка AB).

2.

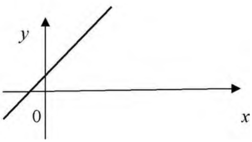


$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$ – ***рівняння кола з центром в точці A(a; b) та радіусом R.***



$x^2+y^2=R^2$ – ***рівняння кола з центром у початку координат O(0;0) та радіусом R.***

3.



$y = kx + b$ або $ax + by + c = 0$ – ***рівняння прямої***

Задача 1.

Знайдіть довжину медіани AM трикутника ABC,якщо B(-7;2), C(3;6), A(1;-2)

Розв'язання

Точка M(x_0;y_0) – середина відрізне BC. Звідси, $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-7+3}{2} = -2$

$y_0 = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$

Отже, M(-2;4) Довжину відрізка AM обчислюємо за формулою

AM=$\sqrt{(-2-1)^2+(4-(-2))^2} = \sqrt{(-3)^2+6^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Відповідь: $3\sqrt{5}$

Задача 2.

Відстань між точками $A(9; y)$ і $B(5; -2)$ дорівнює 5.

Знайдіть y.

Розв'язання

За формулою довжини відрізка маємо:

AB=$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

5=$\sqrt{(5-9)^2+(2-y)^2}$

5=$\sqrt{(-4)^2+(2+y)^2}$

$25 = 16 + 4 + 4y + y^2$

$y^2 + 4y - 5 = 0$

$y_1 = -5$

$y_2 = 1$

Відповідь: $-5; 1$

Задача 3.

Визначте за рівняння кола координати його центра і радіус

1) $(x-1)^2+(y-2)^2 = 9$

Відповідь: $(1; 2)$ – центр кола, $R = 3$

2)$(x+3)^2+y^2=25$
Відповідь: (−3;0) – центр кола, $R=5$

3) $x^2+(y-4)^2=11$

Відповідь: (0;4) – центр кола, $R=\sqrt{11}$

Задача 4.

Сладіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-5;3)$ і $B(1;-3)$

Розв'язання

Рівняння прямої має вигляд $y=kx+b$

Маємо: $\begin{cases}3=-5k+b\\-3=1k+b\end{cases}$

$3-(-3)=-5k-1k+b-b;$

$6=-6k;$

$k=-1$

Знайдене значення $k=-1$ підставимо в перше рівняння , отримаємо:

$3=-5(-1)+b;$

$b=-2$

Отже, рівняння прямої має вигляд $y=-x-2$ або $x+y+2=0$

Завдання для самостійного розв'язування до теми 14

№1. Запишіть рівняння кола з центром у точці $0(-2\ ;\ 1)$ та радіусом , що дорівнює 4.

№2. Знайдіть на осі абсцис точку , яка рівновіддалена від точок $A(1\ ;5\ )$ і $B(\ 3;1)$.

№3. Визначте кутовий коефіцієнт прямої , заданої рівнянням $3x+y=1$.

№4. Знайдіть відстань від початку координат до середини відрізка AB, що $A(3;-2), B(-1;4)$

№5. Складіть рівняння кола з центром у точці $M(-3;1)$, що проходить через точку $K(-1;5)$.

№6. Точка C – середина відрізка AB . Знайдіть координати точки B , якщо $A(-3; -2)$, $C\ (1; -3)$.

№7. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-2; 1)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює 3.

Відповіді до теми №14:

№1. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$

№2. $C(-4; 0)$

№3. -3

№4 $\sqrt{2}$

№5. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 20$

№6. $(5\ ; -4)$

№7. $y = 3x + 7$

Зміст

Література

1. Мерзляк А.Г. ,Полонський Б.Б., Якір М.С. Алгебра Підручник для 8кл. Загальноосвіт. навич. закладів. – Х. : Гімназія , 2008.

2. Кравчук В.П. Підручна М.В. , Янченко Г.М. Алгебра : Підруч . для 9кл. Загальноосвіт – Тернопіль: Підручники і посібники , 2009

3. Єршова А.Г. Геометрія 8клас – Х. : Вид-во «Ранок» 2010.

4. Єршова А.Г. Геометрія 9клас – Х. : Вид-во «Ранок» , 2010 .

5. Глобін О.І. та ін.. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики 9-й клас. – К. : Центр навч.-метод. л-ри , 2013.

6. Бурда М.І. та ін.. Збірник завдань для державної підсумком атестації з математики . 9клас. Х.: Гімназія 2010.